UNIDAD DOS

FUNCIONES, TRIGONOMETRÍA E HIPERNOMETRÍA

UNIDAD DOS: FUNCIONES, TRIGONOMETRÍA E HIPERNOMETRÍA

CAPITULO UNO: Las Funciones

CAPÍTULO DOS: Trigonometría Analítica

CAPÍTULO UNO: FUNCIONES

$\boxed{y = f(x)}$

INTRODUCCIÓN

En Matemáticas uno de los conceptos más importantes es el de FUNCIÓN, se cree que el gran matemático alemán Leibniz la introdujo a finales del siglo XVII. El concepto proviene del latín *functo*, que quiere decir *Acto de realizar*.

Todas las áreas de las Matemáticas tienen que ver con funciones, de allí la importancia de su análisis, partiendo de la definición, sus características y su clasificación.

El capítulo esta estructurado de una manera secuencial, iniciando con el estudio del sistema de referencia más utilizado, las características de las relaciones y la Conceptualización de función. Se ha dado bastante importancia a los principios sobre funciones para luego análisis las clasificaciones más relevantes.

Respecto a los tipos de clasificación, se ha dado en forma macro, con el fin de que cualquier función pueda ser considerada dentro de una de las categorías dadas, por supuesto sus aplicaciones.

Es importante analizar cada temática con detenimiento, haciendo los ejercicios propuestos para poder comprender y afianzar los conocimientos sobre funciones. El tema de funciones es muy interesante y apasionante.

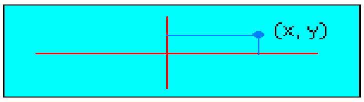
Objetivo General

Que los estudiantes comprendan los principios, leyes y propiedades de las relaciones y funciones, los campos de aplicación y las particularidades que tiene la amplia gama de funciones.

Objetivos Específicos

1. Analizar y comprender claramente el concepto de relación, dominio y rango.
2. Identificar las 4 formas de definir una función, sus partes y su representación gráfica.
3. Comprender el fundamento de las formas de clasificar las funciones, las características de cada clase y sus aplicaciones.
4. Resolver problemas sobre funciones
5. Comprender los principios de trigonometría e Hipermetropía.

SISTEMA DE COORDENADAS



Los Matemáticos y Científico, han inquietado sus estudios a las representaciones gráficas de los fenómenos naturales, para lo cual se han diseñado diversos sistemas de representación, las cuales tiene un sistema de referencia, llamada "Sistema de Coordenadas", en las cuales se hacen los gráficos según el sistema definido. Entre las más conocidas se tienen las coordenadas cartesianas, las coordenadas polares, las coordenadas esféricas y las coordenadas cilíndricas. Para efectos de este curso se van a estudiar las coordenadas cartesianas.

COORDENADAS CARTESIANAS:

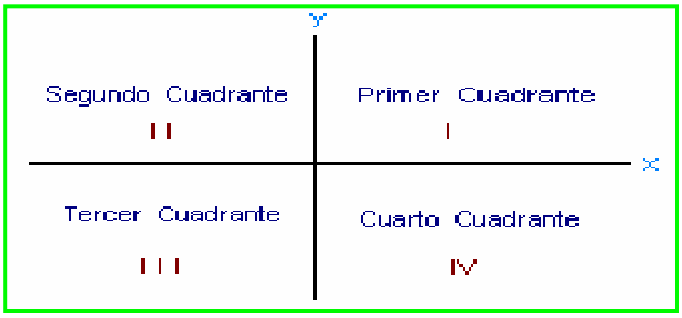
Renato Descartes (1.596 – 1.650) en su gran sabiduría estableció que un punto cualquiera del plano geométrico se podría ilustrar por medio de un par ordenado (x, y) que representa la distancia euclidia perpendicular desde los ejes del sistema que él propuso a dicho par ordenado. Se considero el principal conector entre el lenguaje gráfico y el lenguaje algebraico, ya que por medio de éste, se pudo relacionar a una ecuación con una curva y viceversa.

Actualmente se les conoce como el sistema de coordenadas cartesianas o rectangulares, la cual se forma al cruzar dos rectas perpendicularmente, el punto de corte se le llama origen de coordenadas, de esta manera el plano se fracciona en 4 cuadrantes.

<u>Eje de Coordenadas:</u>

Por convención internacional el nombre
de los ejes se presentan así:

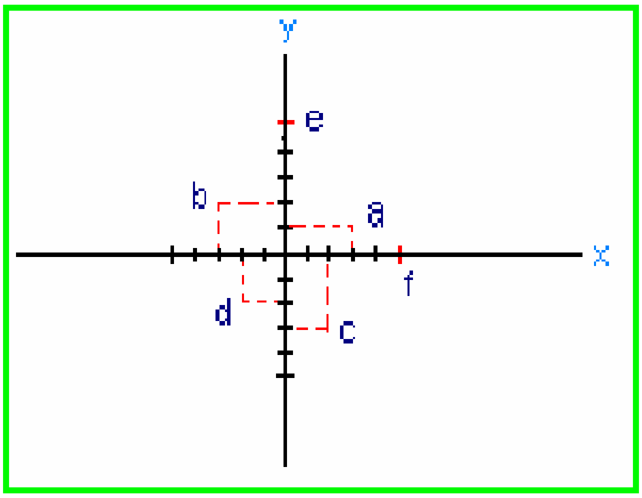
Horizontal: Abscisa o eje x
Vertical: Ordenada o eje y



En este sistema cualquier pareja (x, y) tendrá un signo según el cuadrante. Sabemos que el eje *x* se considera positivo hacia la derecha y negativo hacia la izquierda a partir del origen, el eje *y* se considera positivo hacia arriba y negativo hacia abajo a partir del origen, entonces:

Primer cuadrante: *x* e *y* son positivos
Segundo cuadrante: *x* negativo e *y* positivo
Tercer cuadrante: *x* e *y* negativos
Cuarto cuadrante: *x* positivo e *y* negativo

Para ilustrar esta convención veamos el siguiente grafico. Ubicar en el plano cartesiano los siguientes puntos: a(3, 1), b(-3, 2), c(2, -3) y d(-2, -2), e(0, 5) y f(5,0).



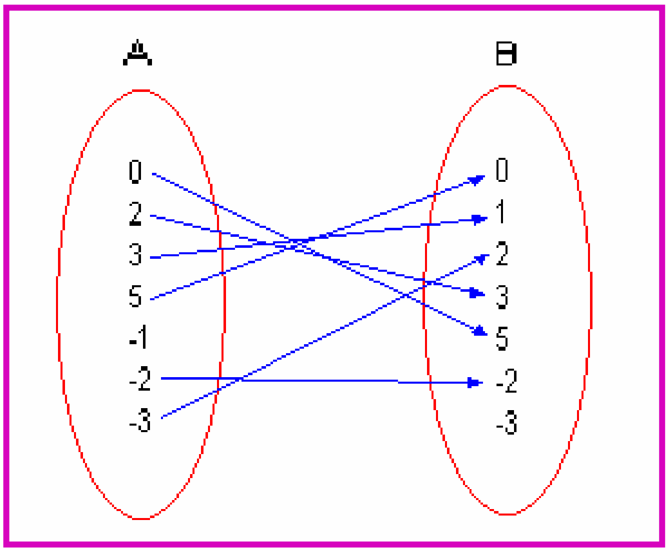
En cada pareja ordenada la primera componente corresponde al eje x y la segunda componente al eje y.

Se observa que el punto *a* es positiva para las dos componentes, b es negativa para la primera componente y negativa para la segunda componente. Así se puede observar para las demás puntos.

DIAGRAMAS DE VENN:

Otra forma de representar un par ordenado, es por medio de los muy conocidos Diagramas de Venn. John Venn, un lógico Británico (1.834 – 1.923) propone un sistema de óvalos para representar las relaciones entre pares ordenados, propiedades y operaciones entre conjuntos. El sistema buscaba reducir los análisis lógicos y la teoría de conjuntos a un cálculo simbólico. Actualmente esta herramienta es muy usada en Matemáticas, especialmente en teoría de conjuntos y en el estudio de funciones.

Cada pareja ordenada esta relacionada a través de un óvalo así: La componente *x* en el primer óvalo y la componente *y* en el segundo óvalo.



En el diagrama de Venn, se esta representando los mismos puntos que fueron ubicados en el plano cartesiano anterior.

El conjunto **A** se le conoce como conjunto de partida o conjunto inicial y al conjunto **B** se le conoce como conjunto de llegada o conjunto final.

Las líneas van del conjunto de partida al conjunto de llegada e indican las parejas ordenadas que se relacionan.

Los elementos del conjunto de partida A, se ubican en el eje *x* del plano cartesiano y los elementos del conjunto de llegada B, se ubican en el eje *y* del plano cartesiano.

RELACIONES:

$$\boxed{f : R \rightarrow R}$$

En el mundo que nos rodea, existen relaciones entre dos conjuntos, por ejemplo la relación entre Temperatura y Altitud, la cual establece que a mayor altitud, menor temperatura. Otro caso es la relación entre le número de kilómetros recorridos y el costo del servicio en un taxi, el cual esta relacionado que a mayor kilometraje, mayor costo del servicio. Así existen muchas relaciones entre dos conjuntos.

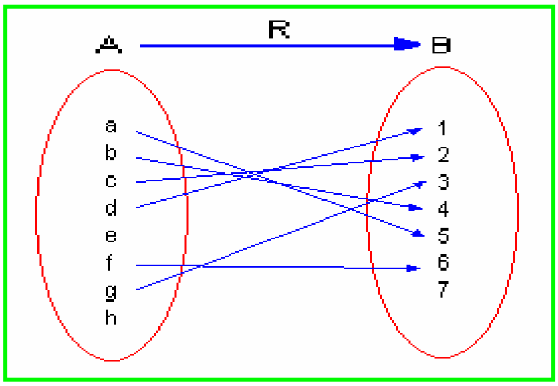
El concepto de relación esta asociado a una *condición* entre dos conjuntos, de tal manera que a cada elemento del conjunto de partida, le corresponde un o varios elementos del conjunto de llegada.

Las relaciones se pueden representar por medio de los diagramas de Venn.

Las parejas ordenadas graficadas son:
(a, 5), (b, 4), (c, 2), (d, 1), (f, 6), (g, 3)

Según la teoría:

A = Conjunto de partida
B = Conjunto de llegada
R = Relación entre cada para ordenado.



Componentes de Una Relación:

Toda relación presenta varios componentes.

Dominio: Corresponden a todos los elementos que conforman el conjunto de partida; es decir, los elementos del conjunto A.
Codominio ó Rango: Corresponde a los elementos que conforman el conjunto de llegada; es decir, los elementos del conjunto B.
Regla o Norma: Corresponde a la forma en que se asocian los elementos del dominio y el codominio, generalmente se representa con la R.

$$\boxed{\text{Sea} \quad R: A \longrightarrow B}$$

La expresión significa que existe una relación R entre los conjuntos A y B.

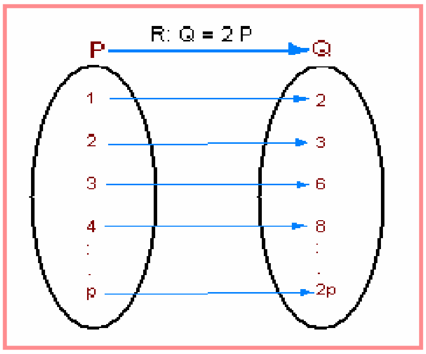
Ejemplo 1:

Dada la relación entre los conjuntos P y Q, cuya norma o regla es: Q = 2P, hacer el diagrama de Venn e identificar las parejas ordenadas, tomar los 4 primeros enteros positivos.

Solución:

A partir de las condiciones del problema:

Sea R: $P \xrightarrow{R:\ Q=2P} Q$



Las parejas ordenadas:

(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), … , (p, 2p)

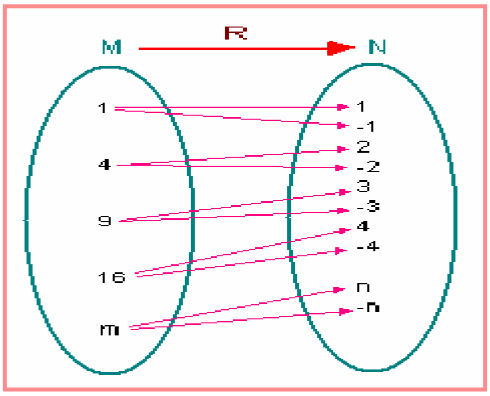
En el conjunto de partida se tomaron los 4 primeros números enteros positivos por las condiciones del ejemplo, pero en dicho conjunto se pueden tomar los valores que se deseen, sean positivos o negativos.

Ejemplo 2:

Dados los conjuntos M y N, de tal manera que N sea la raíz cuadrada de M. Hacer el diagrama de Venn y obtener las parejas ordenadas para 1, 4, 9, 16,…, m para m positivo.

Solución:

Sea R: $M \xrightarrow{R: N \Rightarrow \sqrt{M}} N$



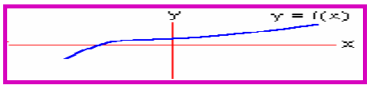
Las parejas ordenadas:

(1, -1) y (1, -1)
(4, 2) y (4, -2)
(9, 3) y (9, -3)
(16, 4) y (16, -4)

En general:

(m, n) y (m, -n)

FUNCIONES



Uno de los conceptos más importantes en Matemáticas es el de Función, ya que en las ciencias puras y aplicadas son fundamentales para analizar diferentes fenómenos. En Biología el crecimiento de los organismos es modelado por una función exponencial, en Economía para la descripción del costo ó utilidad de un artículo, en Física el análisis del movimiento se modela por funciones polinómicas, etc.

Dentro del análisis de funciones, hay algunos conceptos que son pertinentes mencionar.

Variables: Se puede decir que es todo aquello que cambia a través del tiempo o espacio, el mismo espacio y tiempo se consideran variables. La clave de este concepto es que ocurre cambio, ya que si esto sucede, se dice que ocurrió variación. En el estudio de funciones se conocen dos tipos de variables. ***VARIABLE INDEPENDIENTE***: Se considera aquella que se define por si misma, una de esas por su naturaleza es el tiempo, pero existen otras. Esta variable por lo general se ubica en el eje de las abscisas del plano cartesiano; es decir, en el eje *x*. ***VARIABLE DEPENDIENTE***: Como su nombre lo indica, son aquellas que quedan definidas a partir de otra; es decir, depende de otra para quedar definida. Esta variable es ubicada en el eje de las ordenadas en el plano cartesiano; eje *y*. Cuando se dice que el área de un círculo es función del radio, lo que se quiere decir es que el área depende del radio. A = f (R)

Constantes: Son términos que tienen valores fijos; es decir, tiene valores fijos, lo que indica que no cambia en ninguna circunstancia. Los valores numéricos son el ejemplo típico de constantes.

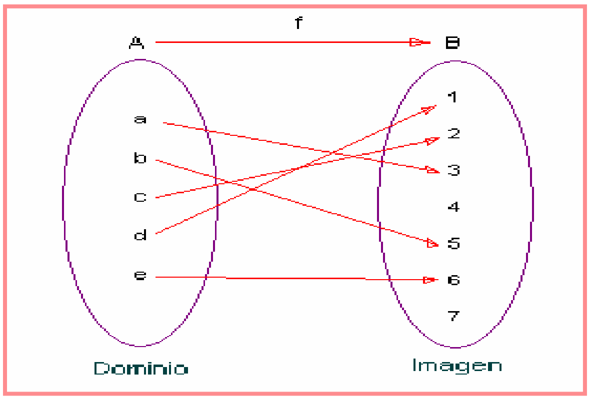
En la antigüedad se utilizaban las vocales para indicar las variables y las consonantes para indicar las constantes. En la actualidad por convención general, las primeras letras del alfabeto se utilizan para indicar las constantes y las últimas letras para indicar las variables.

Con estos elementos se puede hacer una definición de función.

> **DEFINICIÓN:** Una función es *una relación* donde a cada elemento del conjunto de partida le corresponde *uno y solo* un elemento del conjunto de llegada.

En funciones al conjunto de partida se le llama Dominio y al conjunto de llegada se le llama imagen. En el plano cartesiano los elementos del dominio son ubicados en el eje *x* y los elementos de la imagen son ubicados en le eje *y*.

Por la definición, se puede inferir que todas las funciones son relaciones, pero NO todas las relaciones son funciones. (*Discutir esta conclusión con los compañeros del grupo colaborativo*)



Para determinar si una relación es función, basta con observar en el diagrama de Venn, que todos los elementos del dominio estén relacionados con algún elemento del rango, pero solo con uno.

Gráficamente, que de todos los elementos del dominio salga solo una flecha.

Hay dos casos donde la relación no es función: Cuando un solo elemento del dominio no este relacionado con alguno del rango o si algún elemento del dominio esta relacionado con más de un elemento del rango.

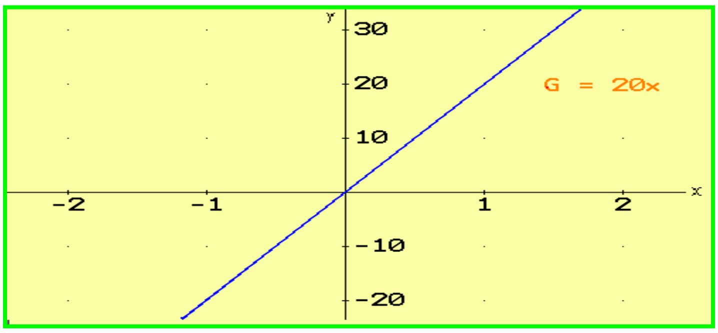
Existen 4 formas de definir una función, en el trabajo con funciones estas formas se trabajan indistintamente, lo que indica que se deben conocer y dominar adecuadamente.

1. DESCRIPTIVA: Es la descripción verbal del fenómeno que se estudia, en esta se detallan las condiciones en que ocurren los hechos. Por ejemplo: La ganancia G que resulta de vender x artículos, en la cual el valor unitario es de $200.

2. NUMÉRICA: Consiste en hacer una tabla de valores con los datos obtenidos del fenómeno al hacer las mediciones correspondientes. Por ejemplo:

x	0	1	2	3	4 . . .
G	0	20	40	60	80 . . .

3. GRÁFICA: Por medio de una representación gráfica, ubicando pares ordenados en el plano cartesiano, se puede observar la forma de la curva que muestra la función dada.



Los puntos ubicados en el plano son los descritos en la parte numérica.

En el eje x se representan los artículos vendidos y en el eje y la ganancia por ventas.

4. ANALÍTICA: También es llamada Matemática, es aquella que por medio de un modelo matemático se describe el fenómeno, para el ejemplo que estamos analizando seria:

$$\boxed{G = 20x}$$

El modelo describe la ganancia (G) en función de número de artículos vendidos (x).

ELEMENTOS DE UNA FUNCIÓN:

En toda función se pueden encontrar 3 elementos.

Dominio: Son los elementos del conjunto de partida; es decir, los elementos de *x*, que corresponden a la variable independiente. En el ejemplo modelo la variable independiente son el número de artículos vendidos. Anteriormente se hizo aclaración que los elementos del dominio se ubican en el eje *x* del plano cartesiano.

Imagen: Son los elementos del conjunto de llegada; es decir, los elementos de *y*, que corresponden a la variable dependiente. En el ejemplo modelo es la ganancia G. También por convención los elementos de la imagen se ubican en el eje *y* del plano cartesiano.

Regla o Condición: Se considera a la forma en que se relacionan los elementos de *x* e *y*. Cada función tiene una regla que relaciona las dos variables. Solo se debe tener presente que a cada elemento de *x* le corresponde solo uno de *y*.

Ejemplo 1:

La relación entre las variables x e y esta dada de tal manera que y se obtiene elevando al cuadrado la variable x. a partir de la descripción del fenómeno, obtener la tabla de datos, la gráfica y el modelo matemático.

Solución:

Los valores:

x	0	1	2	3	4	5
y	0	1	4	9	16	25

La grafica:

Plano Cartesiano.

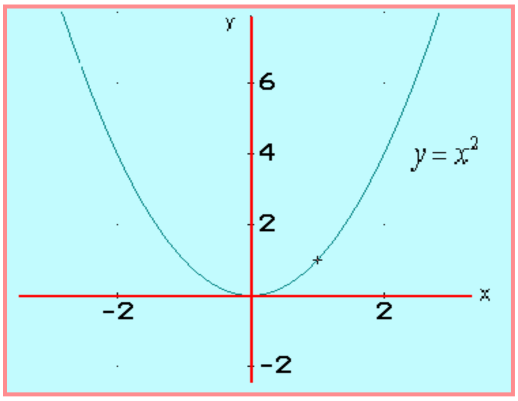
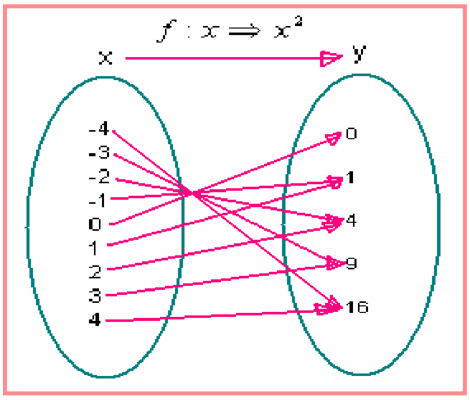


Diagrama de Venn



El modelo matemático:

$$y = x^2$$

El dominio: Para el caso que se presenta, la variable independiente puede tomar cualquier valor real, luego el dominio son todos los reales.
La Imagen: Para cualquier valor de la variable independiente, el valor de la variable dependiente será positiva, luego la imagen son todos los reales no negativos.

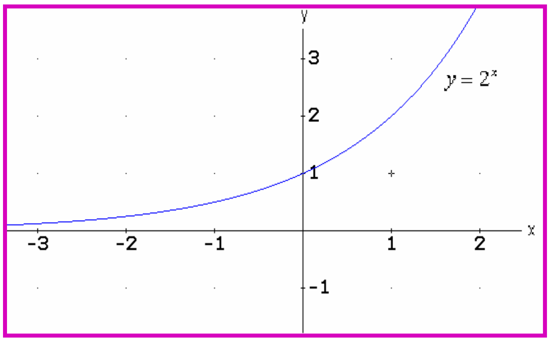
Determinación del Dominio e Imagen de una Función:

En el análisis de funciones, es importante identificar el dominio e imagen de la función, lo cual se puede hacer de dos maneras.

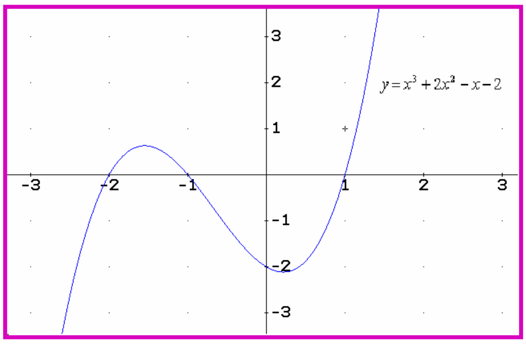
A Partir de la Gráfica:

Con la observación detallada de la gráfica, se puede identificar el dominio y la imagen de una función, veamos dos ejemplos modelos.

Gráfica A



Gráfica B



Gráfica A. Se observa que la curva se desplaza a lo largo del eje x, tomando valores positivos y negativos, luego el dominio son todos los valores reales. Para la imagen, la curva se desplaza en la parte positiva del eje y, luego la imagen son todos los reales positivos.

La notación será: $f : R \rightarrow R^+$

Gráfica B: En la curva se observa que la grafica puede tomar valores positivos o negativos en el eje x, igual para el eje y, luego el dominio e imagen de la función son todos los reales.

La notación será: $f : R \rightarrow R$

A Partir del Modelo Matemático: (fórmula matemática)

Dada el modelo matemático, se puede determinar los valores que pueden tomar la variable independiente y la variable dependiente. Con algunos ejemplos modelos se puede comprender la situación.

Sea. $\boxed{y = x^3 + 2x^2 - x + 1}$ Según el modelo se puede inferir que la variable x puede tomar valores positivos, negativos incluso cero, luego el dominio son todos los reales. Así se observa que la variable y tendrá valores positivos y negativos e incluso cero, luego la imagen son todos los reales; es decir es una función de reales en reales.

Sea. $\boxed{y = \frac{1}{x}}$ Se puede ver que la variable *x* puede tomar valores positivos y negativos, pero NO puede tomar el valor de cero, luego el dominio serán todos los reales diferentes de cero. La variable *y* será positiva si x es positiva y viceversa, pero nunca será cero, luego la imagen son todos los reales deferentes de cero.

Sea. $\boxed{y = \sqrt{x}}$ La variable *x* puede tomar valores positivos y cero, pero No puede tomar valores negativos, ya que la raíz cuadrado de números negativos no es real, así el dominio serán los reales positivos y el cero (reales no negativos). Los valores que puede tomar *y* serán positivos y cero ó negativos, pero no los dos; para que se pueda consideran una función, luego la imagen son los reales no negativos ó los reales negativos.

En general el Dominio de una función serán los valores que pueda tomar la variable *x* sin que se presenten ambigüedades en el momento de hacer la operación matemática.
La imagen se determina despejando *x* del modelo matemático y se observa qué valores puede tomar la variable *y*.

NOTA: Con la práctica y muchos ejercicios se ganará destreza para determinar el dominio e imagen de una función.

Notación Moderna de Función:

Fuente: mat.usach.cl/histmat/html/cauc.html

El matemático francés Agustín Louis Cauchy (1.789 – 1.857) dentro de los aportes dados a la matemática, como precisión de los conceptos de Función, Límites y Continuidad, propone una nomenclatura para definir esquemáticamente una función, de la siguiente manera. $\boxed{y = f(x)}$

Como se ha comentado la variable x será la variable independiente y la variable y será la variable dependiente o función. Así *y* y *f(x)* serán equivalentes ya que significan lo mismo.

Por ejemplo si escribimos:

$f(x)=2x^2-3x+1$ Es lo mismo que $y=2x^2-3x+1$

Funciones de Valor Real:

Con lo analizado hasta el momento ya estamos en capacidad de responde las siguientes preguntas.

Toda relación es función:	V	F
Toda función es relación:	V	F

Con la aclaración de las afirmaciones anteriores, ahora se debe analizar en qué conjunto numérico se pueden trabajar las funciones. En apartados anteriores se dio un indicio sobre en donde se puede definir el dominio e imagen de una función.

Una función de valor real, nos indica que los elementos del dominio e imagen son números reales, por esto las funciones de valor real se describen de la siguiente manera:

$$\boxed{f : R \to R}$$

Es pertinente aclarar los conceptos de rango e imagen. El rango es el conjunto que conforma el codominio de la relación y la imagen son los elementos del rango que interactúan con los elementos del dominio.

LAS FUNCIONES SEGÚN EL TIPO DE RELACIÓN:

Como se sabe en las funciones hay una interacción entre los elementos del dominio y rango. De acuerdo al tipo de interacción existen tres clases de funciones.

Función Inyectiva: También llamada Función Uno a Uno, son aquellas donde los elementos del rango que son imagen de algún elemento del dominio, solo lo hacer una vez. Las funciones crecientes y decrecientes son inyectivas.

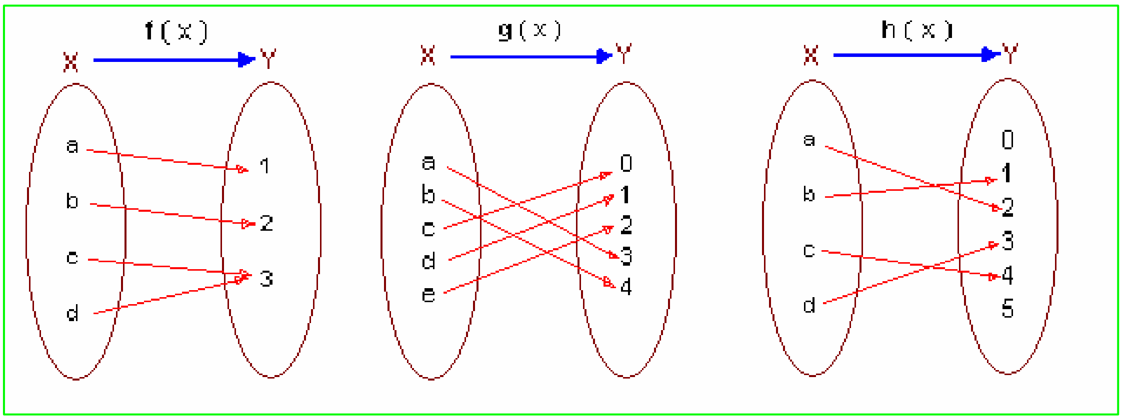
DEFINICIÓN:
Sea la función y = f(x), dados dos elementos del dominio x_1 y x_2,

Si $x_1 \neq x_2$, y $f(x_1) \neq f(x_2)$, entonces la función es inyectiva

Función Sobreyectiva: Las funciones y = f(x), donde "Todos los elementos del rango" son al menos imagen de uno o varios elementos del dominio. Lo anterior quiere decir que todos los elementos del rango se relacionan con algún o algunos elementos del dominio.

Función Biyectiva: Una función y = f(x) es Biyectiva si, solo si, es inyectiva y Sobreyectiva.

En el siguiente grafico identifica que tipo de función es cada una.



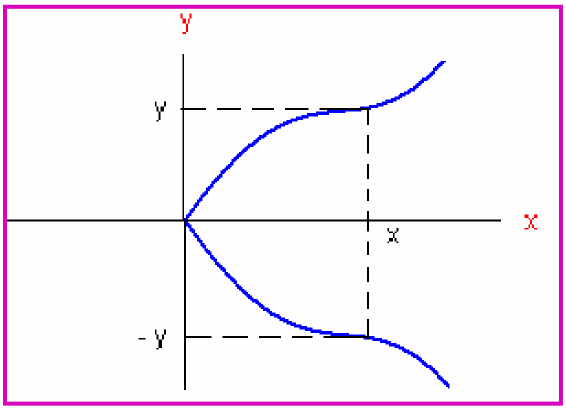
f(x): ______________________________

g(x): ______________________________

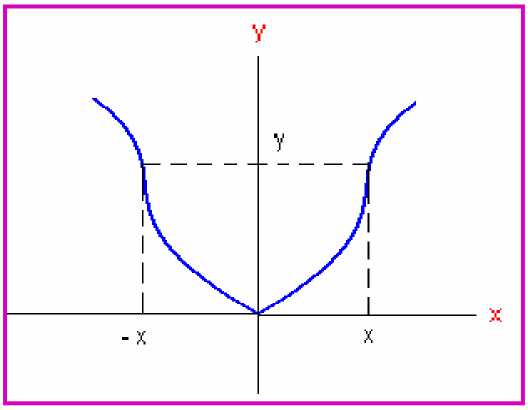
h(x): ______________________________

SIMETRÍA DE LAS FUNCIONES:

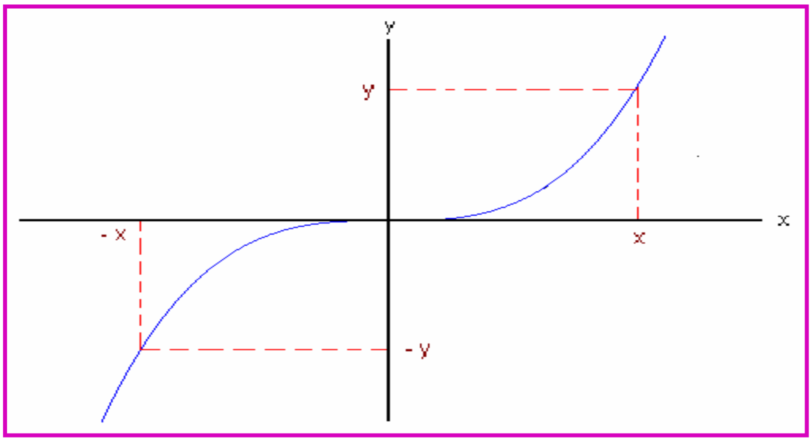
La simetría es el comportamiento de la curva respecto a los ejes coordenados. Una curva es simétrica respecto al eje *y*, si la parte derecha es la imagen especular de la parte izquierda, será simétrica respecto a *x* si la parte superior es la imagen especular de la parte inferior.



Simetría respecto a eje x



Simetría respecto al eje y



Simetría respecto al origen de coordenadas

La simetría de las funciones esta relacionado con el concepto de función par e impar, veamos en que consisten dichos principios.

Función Par: Una función f (x) es par si para todo x en su dominio: ***f (- x) = f (x)***. Este tipo de funciones son simétricas respecto al eje y. El ejemplo típico son las funciones cuadráticas.

Ejemplo 1:

Sea la función $f(x) = x^2 + 2$, mostrar que es par.

Solución:

Lo que se debe hacer es cambiar x por – x en la función

$f(-x) = (-x)^2 + 2 = x^2 + 2$

Como $f(-x) = f(x)$, entonces la función dada es par.

Ejemplo 2:

Mostrar que las funciones: $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2$ y $g(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{x+1}$ son simétricas respecto al eje y.

Solución:

Solo se debe reemplazar a x por – x en cada una y observar el resultado, $f(-x) = f(x)$ y $g(-x) = g(x)$, las funciones son pares por ende son simétricas respecto al eje y.

Función Impar: Una función f (x) es impar si para todo x en su dominio: ***f (- x) = - f (x)***. Este tipo de funciones son simétricas respecto al origen de coordenadas. El ejemplo típico son las funciones cúbicas.

Ejemplo 1:

Dada la función $f(x) = x^3 - 2x$, determinar si es impar.

Solución:

Se debe reemplazar a x por – x y observar la función obtenida.
$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x)$

Como se puede ver $f(-x) = -f(x)$, Luego la función es impar, así será simétrica respecto al origen de coordenadas.

MONOTONÍA DE LAS FUNCIONES:

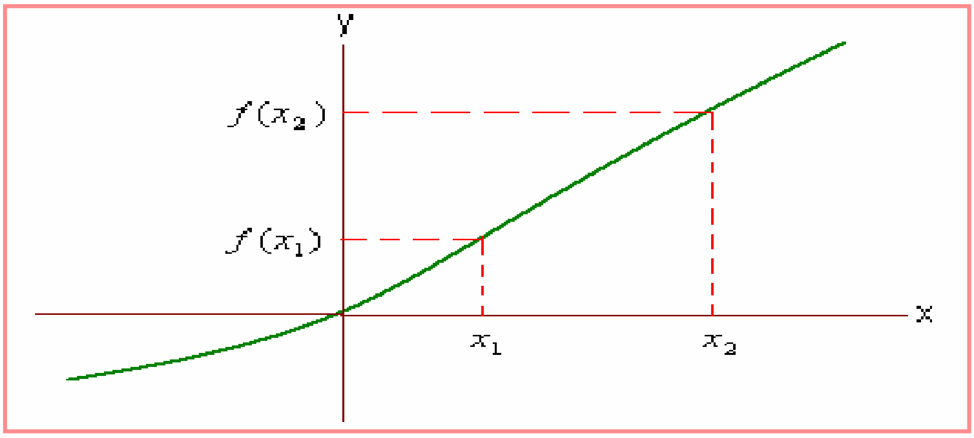
Una función se considera monótona si es creciente o decreciente.

Función Creciente: Intuitivamente una función es creciente si a medida que aumenta la variable x, también aumenta la variable y.

DEFINICIÓN:
Sea f(x) una función definida en el intervalo I, para $x_1 \in I$ y $x_2 \in I$, donde $x_1 < x_2$. Si $f(x_1) < f(x_2)$, se dice que la función es creciente en el intervalo I.

Cuando se dice que la función f (x) esta definida en el intervalo I, se esta afirmando que el intervalo I es parte del dominio de la función.

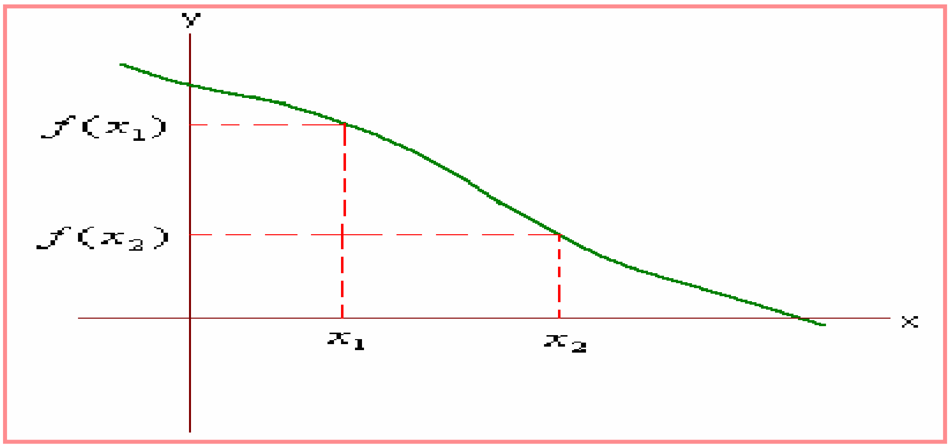
FUNCIÓN CRECIENTE



Función Decreciente: Intuitivamente una función es decreciente si a medida que aumenta la variable x, la variable y disminuye.

DEFINICIÓN:
Sea f(x) una función definida en el intervalo I, para $x_1 \in I$ y $x_2 \in I$, donde $x_1 < x_2$. Si $f(x_1) > f(x_2)$, se dice que la función es decreciente en el intervalo I.

FUNCIÓN DECRECIENTE



Descripción De Una Función:

Describir una función es hacer el análisis donde se identifique el dominio y la imagen, su monotonía, su simetría y la gráfica correspondiente, entre las características más importantes.

Con algunos ejemplos se puede ilustrar la descripción de una función.

Ejemplo 1:

Sea la función f(x) = 3x – 1, hacer una descripción de la misma.

Solución:

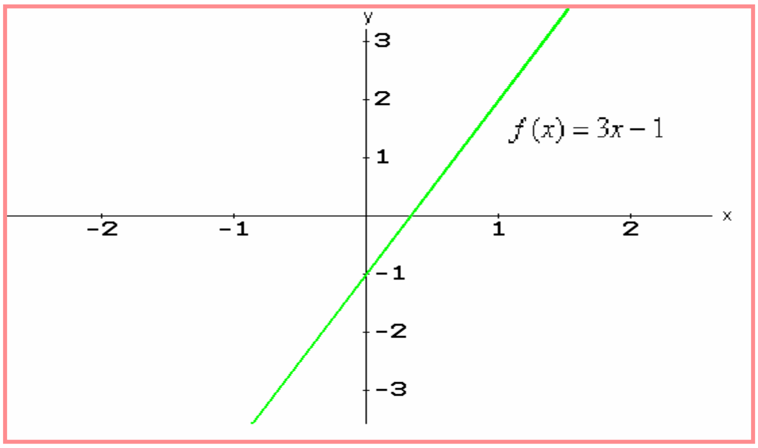
Dominio: Como x puede tomar cualquier valor real, sin restricciones, entonces el dominio son todos los reales. D є **R**.

Imagen: Para hallar la imagen, debemos despejar la variable x y observar qué valores puede tomar y, como y = 3x – 1, entonces. x = (y + 1) / 3 Así, la variable y puede tomar cualquier valor real, luego la imagen son todos los reales I є **R**.
Decimos: f: **R** $\longrightarrow$ **R**.

Monotonía: Se debe identificar si la función es creciente o decreciente. Para esto se toman dos valores del dominio: $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$, recordemos que $x_1 < x_2$ según la definición. Ahora se determina la imagen de cada uno así:
$f(x_1 = 2) = 3(2) - 1 = 5$
$f(x_2 = 3) = 3(3) - 1 = 8$
Como $f(x_1) < f(x_2)$ la función es creciente.
Simetría: Se debe buscar que f (- x) = f (x) ó f (- x) = - f (x), de otra manera no hay simetría.
f (- x) = 3 (- x) – 1 = - 3 x – 1 = - (3 x + 1). Como se puede ver No se cumple ninguna de las dos condiciones, luego la función no tiene simetría.

Gráfico: Para hacer el gráfico se debe tomar algunos puntos, veamos:

x	y
-2	-7
-1	-4
0	-1
1	2
2	5



Ejemplo 2:

Sea la función $y = \sqrt{x}$ Hacer la descripción de dicha función.

Solución:

Dominio: La variable x esta dentro de una raíz cuadrada, luego solo puede tomar valores positivos y cero, pero no puede tomar valores negativos, luego el dominio son los reales positivos y el cero; es decir, los reales no negativos (**R***)
D є **R***

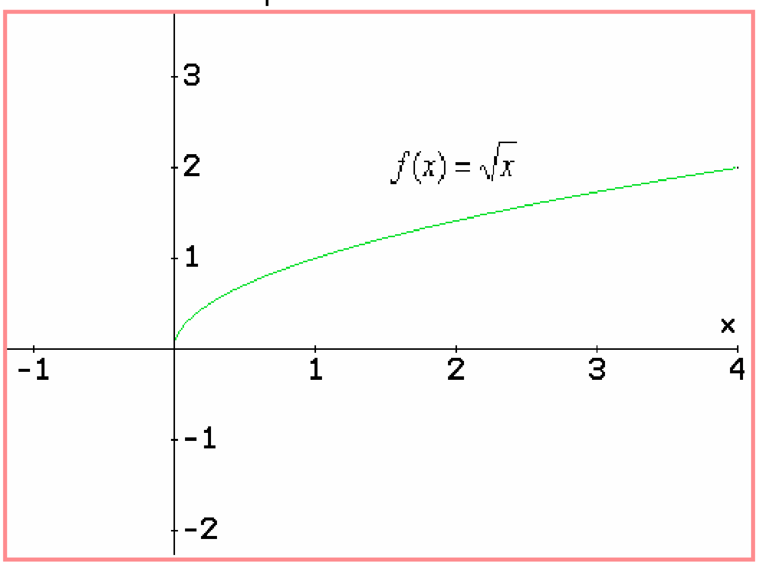
Imagen: Despejamos la variable x, luego: $x = y^2$ esto significa que la variable y solo toma valores positivos o cero (analice porqué). I є **R***
Se puede expresar: f: **R*** $\longrightarrow$ **R***

Monotonía: Tomemos dos valores, digamos $x_1 = 1$ y $x_2 = 4$, entonces: $f(x_1) = \sqrt{1} = 1$ y $f(x_2) = \sqrt{4} = 2$. Como $f(x_1) < f(x_2)$ la función es creciente.

Simetría: Si tomamos f (- x) en la función, se presenta ambigüedad, ya que raíces pares de números negativos no son reales. Así la función no es simétrica.

Grafica: Tomamos varios puntos

0	0
1	1
2	$\sqrt{2}$
4	2
6	$\sqrt{6}$
9	3



EJERCICIOS

Para las funciones dadas, hacer la descripción correspondiente.

1. $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$

2. $g(x) = \dfrac{5x-1}{2x-6}$

3. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-16}}$

4. Dada la función $f(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x+1}}$ Hallar la imagen; si existe para x = 0, x = -1, x = 1, x = 3

5. Para la función $g(x) = \dfrac{x-4}{3x-2}$ Cual será el valor de x para:
   a) g(x) = 0
   b) g(x) = -3

6. Demuestre que la función $y = \dfrac{3}{2-x}$ es decreciente.

7. Demuestre que la función $y = \sqrt{4x^3 - 5}$ es creciente

8. Demuestre que la función $y = x^3 + 4x$ es simétrica respecto al origen de coordenadas.

9. Proponga dos ejemplos de funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

10. ¿En qué condiciones una parábola y una circunferencia es función?

ALGEBRA DE FUNCIONES

Las funciones también se pueden operar algebraicamente.

SUMA: La suma de dos o más funciones origina otra función, cuyo dominio serán los elementos comunes a las funciones que participaron en la operación.

Sean las funciones. f (x), g (x), h (x) entonces: s (x) = f (x) + g (x) + h (x)

La suma de funciones cumple con las leyes básicas propias de la suma, como la conmutativa, clausurativa, asociativa y otras.

RESTA: Al igual que en la suma, la resta de dos o más funciones, origina otra función. El dominio de la función resultante son los elementos comunes a las funciones que fueron operadas.

Sean f (x) y g (x) dos funciones, luego: r (x) = f (x) – g (x)

Es pertinente recordar que la resta no es conmutativa.

PRODUCTO: Cuando se multiplican dos o más funciones, se produce otra función, la función resultante tiene como dominio los elementos comunes de las funciones multiplicadas.

Sea f (x), g (x) y h (x), funciones , entonces: p (x) = f (x) x g (x) x h (x)

COCIENTE: Dividir funciones es equivalente a dividir polinomios, solo que para poder realizarla, el denominador debe ser diferente de cero.

Sea $f(x)=\dfrac{g(x)}{d(x)}$ con d (x) ≠ 0.

El dominio de f (x) serán todos los valores de x, excepto aquellos que hagan d (x) = 0

Ejemplo 1:

Sean las funciones: $f(x)=3x^2-2x+5$ y $g(x)=x^2-6$
Hallar: f (x) + g (x), f (x) – g (x), f (x) X g (x), f (x) / g(x),

Solución:

-) $f(x)+g(x)=(3x^2-2x+5)+(x^2-6)=4x^2-2x-1$

-) $f(x)-g(x)=(3x^2-2x+5)-(x^2-6)=2x^2-2x+11$

-) $f(x)Xg(x)=(3x^2-2x+5)X(x^2-6)=3x^4-2x^3-13x^2+12x-30$

-) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^2 - 2x + 5}{x^2 - 6} = 3 - \frac{2x + 23}{x^2 - 6}$

Ejemplo 2:

Hallar la suma, resta, producto y cociente de las funciones dadas a continuación:

$f(x) = e^{2x} + 10$ y $g(x) = Ln(x) - 4$

La primera es una función exponencial y la segunda una función logarítmica, más adelante se estudiaran.

Solución:

-) $f(x) + g(x) = (e^{2x} + 10) + (Ln(x) - 4) = e^{2x} + Ln(x) + 6$

-) $f(x) - g(x) = (e^{2x} + 10) - (Ln(x) - 4) = e^{2x} - Ln(x) + 14$

-) $f(x) X g(x) = (e^{2x} + 10) X (Ln(x) - 4) = Ln(x)e^{2x} + 10\, Ln(x) - 4e^{2x} - 40$

-) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^{2x} + 10}{Ln(x) - 4}$ Para $Ln(x) - 4 \neq 0$

En este ejemplo se puede observar que cuando las funciones no se pueden operar, entonces se deja indicado dicha operación.

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES: Una de las operaciones más importantes en el álgebra de funciones es la composición. Intuitivamente componer funciones es "Introducir" una función dentro de otra, de tal manera que la función introducida será el dominio de la función anfitriona.

Sea f (x) y g (x) dos funciones, entonces:

$$\boxed{f[g(x)] = (f \circ g)(x)}$$

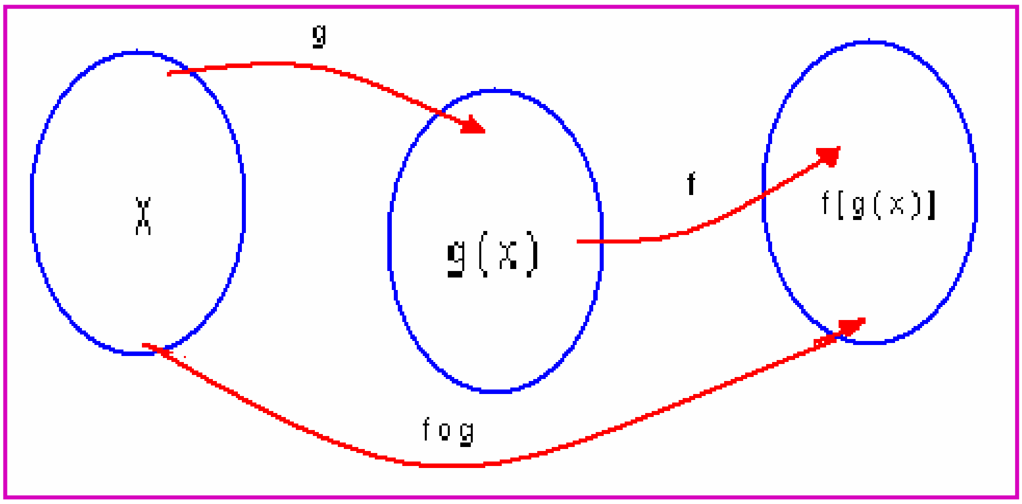
Se lee *f* de *g* ó *g* compuesta *f*

$$\boxed{G[f(x)] = (g \circ f)(x)}$$

Se lee *g* de *f* ó *f* compuesta *g*

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los elementos *x* del dominio de la función *g,* de tal manera que *g(x)* esté en el dominio de *f*. De la misma forma para $g \circ f$.

Se puede graficar la composición de funciones así:



Es de aclarar que al función compuesta NO es conmutativa, ya que:
$f^{o} g \neq g^{o} f$.

Ejemplo 1:

Sea $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = \sqrt{x+1}$ Hallar $f^{o} g(x)$ y $g^{o} f(x)$.

Solución:

-) $fog(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x+1})^2 + 2 = x + 1 + 2 = x + 3$

-) $gof(x) = g(f(x)) = \sqrt{(x^2+2)+1} = \sqrt{x^2+3}$

Ejemplo 2:

Sean las funciones $h(x) = 3x^2 - 2$ y $j(x) = \frac{x-1}{x}$. Hallar $h^{o} j(2)$ y $j^{0} h(3)$

Solución:

Para calcular $h^{o} j(2)$, primero se busca la función compuesta y luego se aplica para x = 2, siempre y cuando este valor este en el dominio de la compuesta. Igual para $j^{0} h(3)$

-) $hoj\ (x) = 3\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 - 2$

Ahora lo aplicamos para x = 2: $hoj\ (x) = 3\left(\frac{2-1}{2}\right)^2 - 2 = \frac{3}{4} - 2 = -\frac{5}{4}$

Entonces $h^{o} j(2) = -5/4$

-) $joh(x) = \frac{(3x^2 - 2) - 1}{(3x^2 - 2)} = \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2}$

Se aplica para x = 3. $joh(x) = \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2} = \frac{3(3)^2 - 3}{3(3)^2 - 2} = \frac{24}{25}$

Entonces $j^{0}h(3) = 24/25$

Ejemplo 3:

Calcular $(f^{o} g)(1/3)$ y $(g^{o} f)(\pi/8)$ para f (x) = sen(4x) y g(x) = Ln(3x)

Solución:

-) Calculemos primero $(f^{o} g)(x)$ y luego lo aplicamos a x = 1/3

$$fog(x) = sen(4Ln(3x))$$

Reemplazamos para x = 1/3.

$$fog\ (x) = sen\ (4\,Ln\ (3\,\frac{1}{3})) = sen\ (4\,Ln\ (1)) = sen\ (0) = 0$$

Entonces $(f^{o} g)(1/3) = 0$

-) Hallemos: $(g^{o} f)(x)$ y luego lo aplicamos a X = π/8

$$gof\,(x) = Ln(3sen(4x))$$

Ahora apliquémoslo a x = π/8

$$gof\ (x) = Ln\ (3\,sen\ (4\,\frac{\pi}{8})) = Ln\ (3\,sen\ (\frac{\pi}{2})) = Ln\ (3\,x1) = Ln\ (3)$$

Entonces $(g^{o} f)(\pi/8) = Ln(3)$

EJERCICIOS

Dada las funciones $f(x)=\frac{5x+1}{x-4}$ y $g(x)=\frac{x-4}{3x}$ Hallar.

1. $f(x)+g(x)$
2. $f(x)-g(x)$
3. $f(x)xg(x)$
4. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Para las funciones $h(y)=y^2-5y+4$ y $L(y)=3y^2-5y+8$ Hallar:

5. $h(y)-3L(y)$
6. $L(y)+5h(y)$
7. $\dfrac{5h(y)}{3L(y)}$

Sean $f(x)=4sen^2(x)$ y $g(x)=4\cos^2(x)$ Hallar:

8. $f(x)+g(x)$
9. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$
10. $\dfrac{g(x)}{f(x)}$

Determinar $(fog)(x)$ y $(gof)(x)$ Para:

11. $f(x)=\dfrac{1}{2x-4}$ y $g(x)=\sqrt{x^2+2}$

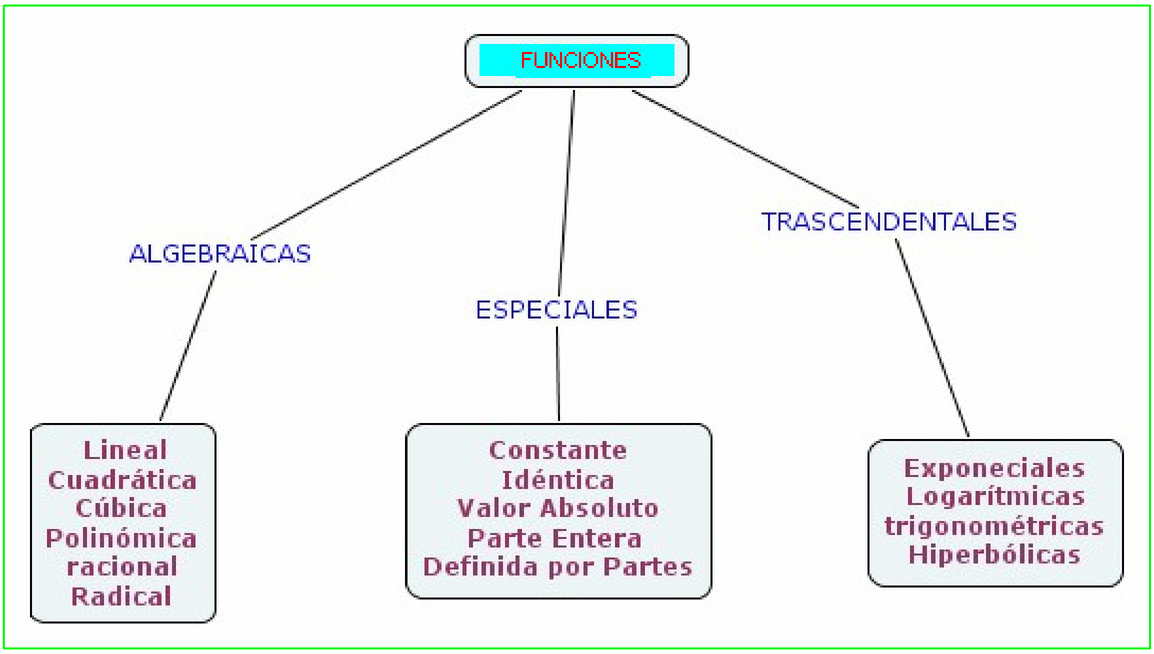
12. $f(x)=2^x$ y $g(x)=sen(3x)$

CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES

Clasificar la gran cantidad y variedad de funciones no es tarea fácil, anteriormente analizamos que según el tipo de relación hay funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Pero existen otros criterios para clasificar funciones, el más general es clasificar las funciones según el tipo de expresión matemática que la describe. Por ejemplo la ecuación lineal describe funciones lineales, las ecuaciones cuadráticas describen funciones cuadráticas, los logaritmos describen las funciones logarítmicas y así sucesivamente.

El criterio descrito es muy pertinente, ya que de esta manera se puede involucrar la mayoría; por no decir todas las funciones que existen y puedan existir.

Bajo este contexto las funciones se clasifican en Algebraicas, Trascendentales y Especiales.



FUNCIONES ESPECIALES:

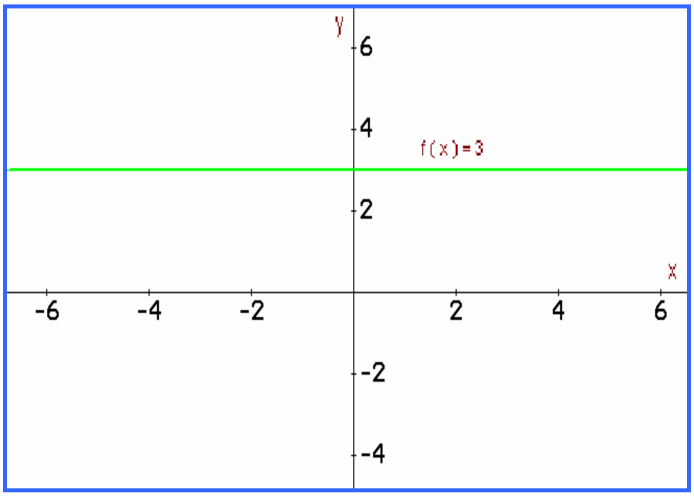
Se consideran a las funciones cuyo modelo matemático no tiene un patrón definido, más bien son muy particulares.

Función Constante:

Sea $f(x)=b$ Siendo *b* una constante. Esta función indica que para todo valor de *x*, su imagen siempre será *b*. La función constante es lineal.

La notación $f : R \rightarrow R_{fijo}$

Su dominio son todos los reales y su imagen un único valor b; quizás esto es lo que la hace ver especial.



Es una función par, ya que f (-x) = f (x), luego es simétrica respecto al eje y.

La función que se presenta en la gráfica muestra que el dominio es cualquier real y la imagen para este caso es y = 3.

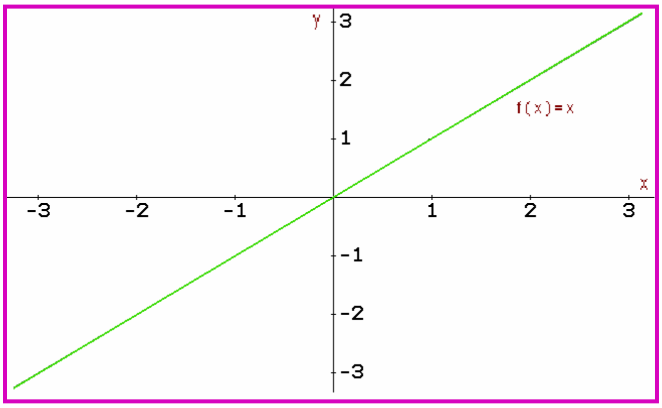
Esta función no es creciente, tampoco decreciente, por lo cual no se considera monótona.

Función idéntica:

Se le llama idéntica ya que para cualquier valor del dominio, su imagen es precisamente el mismo valor.

Sea $f(x) = x$. Esta función también es lineal, solo que el valor del dominio e imagen es el mismo, aquí es donde se le da la connotación de especial. La notación $f : R \rightarrow R$

Esta función es impar, ya que se cumple f (-x) = - f (x).



Por se una función impar, la función idéntica es simétrica respecto al origen.

En la gráfica se observa que la función es creciente, esto porque el coeficiente de la variable *x* es positivo, pero si dicho coeficiente es negativo la función será decreciente, así esta función es monótona.

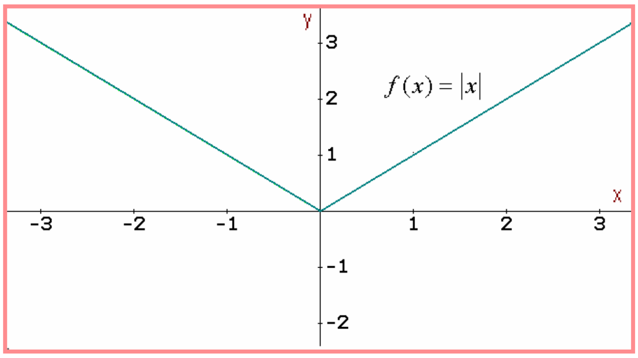
Función Valor Absoluto:

Esta función cumple con los principios del valor absoluto.

Sea $f(x) = |x|$. El dominio son todos los reales, ya que el valor absoluto se aplica a cualquier valor real. La imagen son los reales no negativos, debido a que el valor absoluto por definición siempre será positivo o a lo más cero. La notación $f : R \rightarrow R^*$

Es una función par ya que f (- x) = f (x), por lo cual es Simétrica respecto al eje *y*.

La función es creciente en el intervalo [0, ∞) y decreciente en el intervalo (-∞, 0)



Función Parte Entera:

Es una función muy especial ya que presenta una discontinuidad notoria. Algunos la llaman función escalonada, en la gráfica se verá porque.

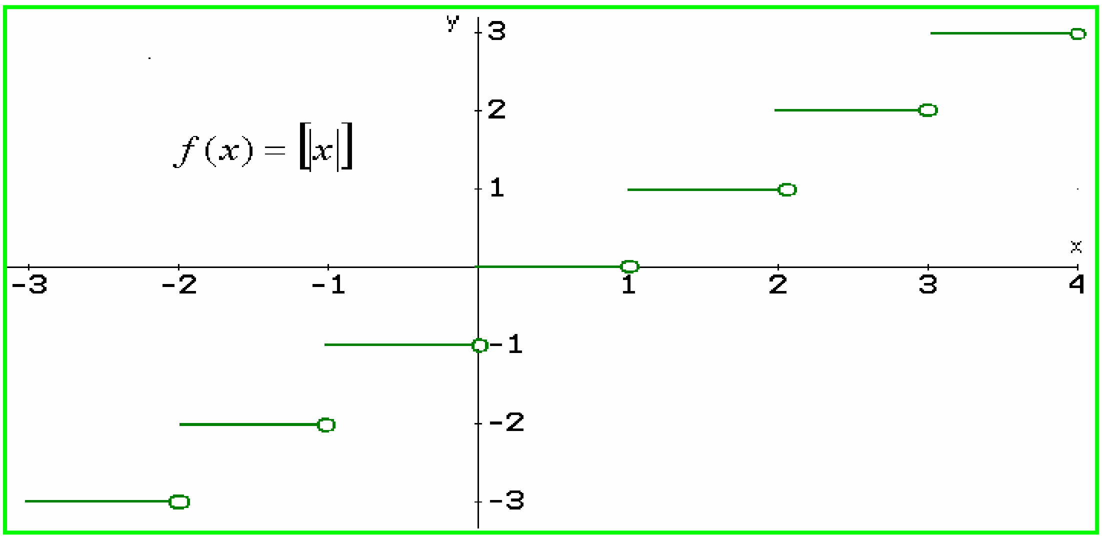
Sea $f(x) = [|x|]$ Cuyo significado es el valor máximo entero menor o igual que *x*, más común parte entera. Por ejemplo $f(x) = [|0,2|] = 0$, ya que 0,2 es mayor menor o igual que 0.

Más explícitamente:

Para -1 ≤ x < 0, su imagen es -1

Para 0 ≤ x < 1, su imagen será 0

Para 1 ≤ x < 2, su imagen es 1. Así sucesivamente.



El dominio de esta función son todos los reales y su imagen los enteros. $f : R \rightarrow Z$

No tiene simetría, tampoco monotonía, su característica más notoria es su discontinuidad para cada x entero.

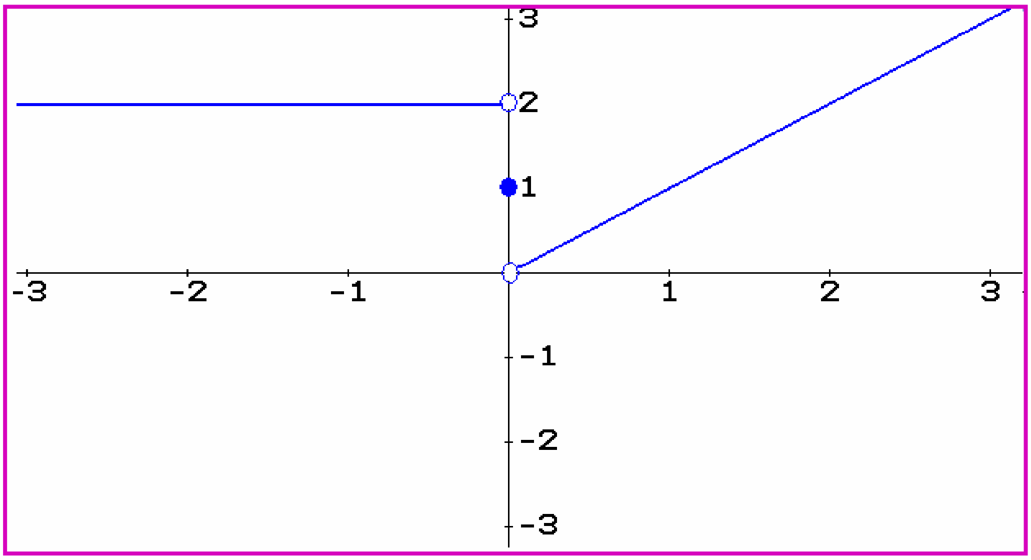
Función Definida por Partes:

Es una función que combina parte de diversas funciones, puede ser definida por una parte constante y otra idéntica, una parte lineal y otra trascendental, etc. En general la función defi0nida por partes se muestra por una regla compuesta por dos o más expresiones matemáticas. Aunque no hay una forma general, podemos ilustrar con algún ejemplo, pero se tendrá más oportunidad de analizar este tipo de funciones a lo largo del curso.

Ejemplo 1:

Sea $f(x) = \begin{cases} x & si \quad x > 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \\ 2 & si \quad x < 0 \end{cases}$

Se observa que esta función esta definida en tres partes, según el valor que tome la variable *x*, para la parte positiva de la variable la función es idéntica, para la parte negativa la función es constante.



FUNCIONES ALGEBRAICAS:

Las funciones algebraicas se caracterizan porque la ecuación que la describe son polinomios, haciendo que éstas tengan los principios y características que tienen los polinomios.

Función Lineal:

Su nombre es dado por la gráfica que la representa, la cual es una línea recta no vertical, además su ecuación es de primer grado.

DEFINICION: Sea $f(x) = mx + b$, donde m y b son reales y a $\neq 0$. Se define como una función lineal, donde m se conoce como la pendiente y b el intercepto.

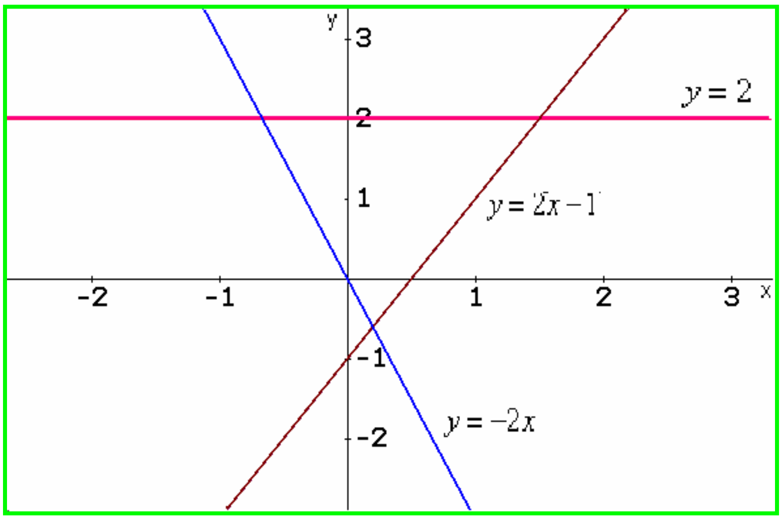
El dominio de la función lineal son todos los reales al igual que la imagen.
$$f : R \to R$$

La pendiente a se calcula de la siguiente manera, a partir de dos puntos P(x_1, y_2) y P(x_2, y_2):

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

La pendiente puede ser negativa, positiva o cero.
Cuando **m = 0**, la recta es horizontal, así la función no tiene monotonía, tampoco simetría.
Cuando **m > 0** la recta es inclinada hacia la derecha, en este caso la función es creciente.
Cuando **m < 0** la recta es inclinada hacia la izquierda, siendo decreciente para este caso.

El intercepto es el punto donde la recta corta al eje *y*.



En la gráfica se observa los tres casos de la función lineal.

Para y = 2 la pendiente m = 0, la recta es horizontal y el intercepto es y = 2.

Para y = 2x – 1, la pendiente m > 0, la recta es creciente y el intercepto es y = -1.

Para y = -2x la pendiente m < 0, la recta es decreciente y el intercepto es y = o.

Como se puede inferir, la monotonía de la función lineal esta determinada por el valor de la pendiente. *En el pequeño grupo colaborativo, analizar la simetría de la función lineal.*

Ejemplo 1:

Sea la función f(x) = ax +b, por dicha función pasa los puntos P(2, 4) y Q(-2, -3). Determinar la ecuación que describe dicha función, identificar la pendiente, el intercepto y hacer la grafica.

Solución:

Según la ecuación que identifica la función f(x) = ax +b, lo que se debe hallar es a y b, sabiendo que a es la pendiente y b el intercepto.

Calculemos la pendiente: tomemos como P(x_1, y_1) y Q(x_2, y_2) entonces:

$$a = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3-4}{-2-2} = \frac{7}{4}$$

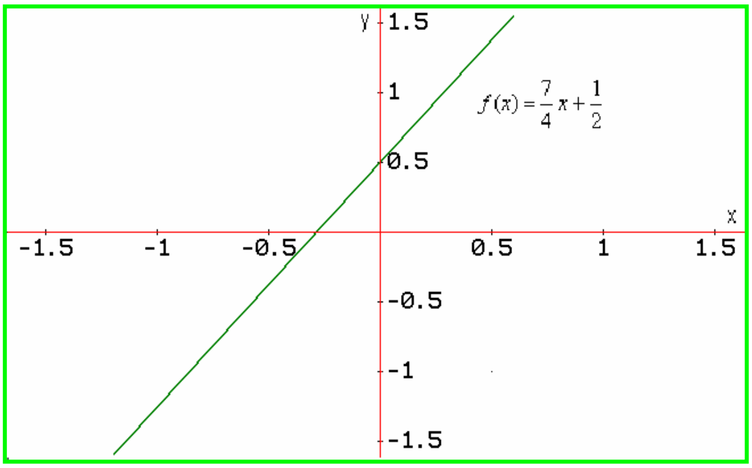
Se reemplaza el valor de a en la ecuación planteada:

$f(x) = \frac{7}{4}x + b$. Como los dos puntos deben satisfacer dicha ecuación, se reemplaza uno de ellos y así se obtiene b:

Tomando el punto P(2, 4), $4 = \frac{7}{4}(2) + b \Rightarrow\Rightarrow b = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$

Así la ecuación que distingue la función es: $f(x) = \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$

La gráfica:



La gráfica muestra que la recta esta inclinada hacia la derecha, luego la pendiente es positiva, lo que se puede corroborar en la ecuación; además, es creciente.

No es simétrica, lo que se puede comprobar sustituyendo a x por – x en la ecuación.

Ejemplo 2.

Dados los puntos R(-3, 4) y S(3, -2), determinar la ecuación lineal que contiene dichos puntos, la gráfica, sus monotonía y establecer si es una función lineal.

Solución:

La ecuación será de la forma: y = mx + b, que es equivalente a la forma f(x) = ax + b

Como en el caso anterior debido a que no se conoce la pendiente lo primero es hallarla.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-4}{3-(-3)} = \frac{-6}{6} = -1$$

Ahora en la ecuación dada se reemplaza uno de los puntos, ya sabemos porqué.

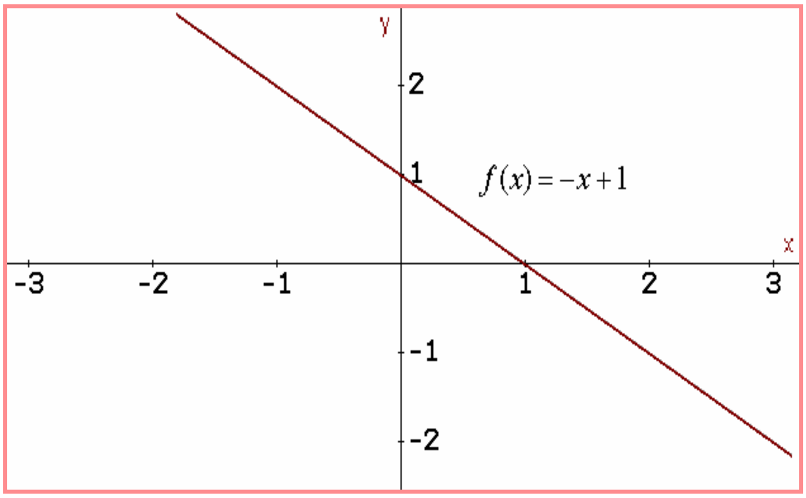
$$4 = -1(-3) + b \Rightarrow\Rightarrow b = 1$$

Por consiguiente: $f(x) = -x + 1$

La gráfica:

Según la ecuación, la pendiente es negativa, luego la recta será inclinada hacia la izquierda, lo que se observa en la gráfica.

La función es decreciente. (*Comprobarlo matemáticamente, en el grupo colaborativo*)



El intercepto es 1, se ve en la gráfica y se observa en la ecuación. Así la expresión obtenida es una función.

Ejemplo 3:

Sean los puntos P(2, 3) y Q(2, -2) que pasan por una recta. Hallar la ecuación, la gráfica y determinar si es función.

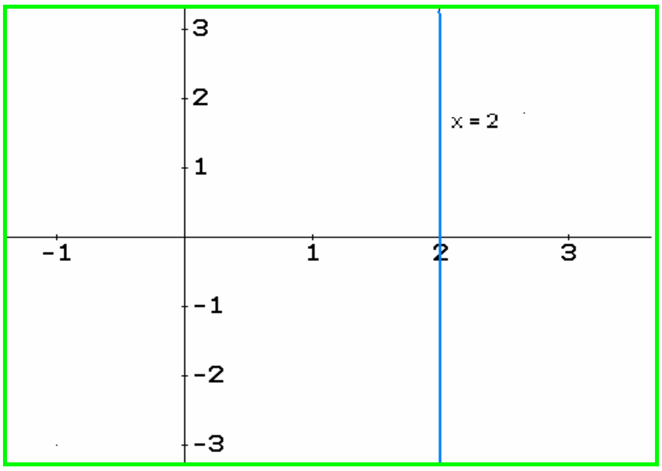
Solución:

Calculemos la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-3}{2-2} = \frac{-5}{0} = Ind$$

Esto nos indica que NO hay pendiente. Así la recta es vertical. La ecuación es de la forma:
x = 2

La gráfica:



La ecuación obtenida No representa una función, ya que para x = 2, las imágenes son infinitas.

Así la expresión x = 2 es una relación, pero no es función.

Generalizando, toda línea vertical representa una relación y toda línea no vertical representa una función.

Función Cuadrática:

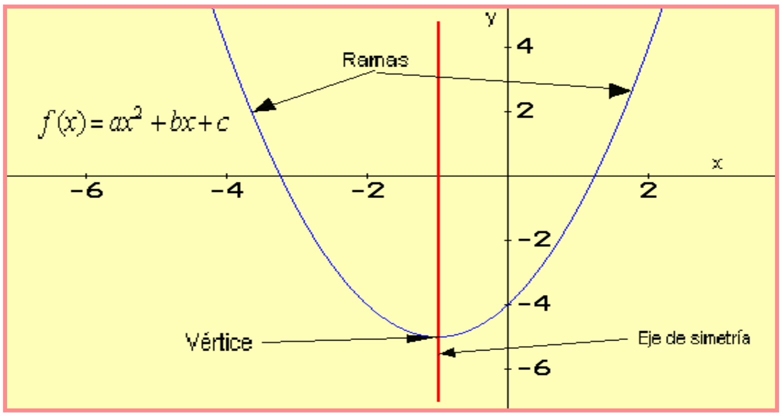
Su nombre es dado por el tipo de polinomio que la describe, un polinomio de segundo grado.

DEFINICION:

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son reales y a $\neq 0$. Se define como una función cuadrática.

El dominio esta dentro de los reales al igual que la imagen. $f : R \rightarrow R$

La gráfica de una función cuadrática es una parábola, que consta de dos ramales que se unen en un punto llamado vértice; además, una recta que pasa por el vértice llamada eje de simetría, el cual divide la curva en dos partes iguales. Para que una parábola corresponda a una función, el eje de simetría debe ser siempre vertical.



Analizando la ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$, se pueden hacer algunas particularidades. Cuando b = c = 0, la parábola tiene el vértice en el origen. Si b y/o c son diferentes de cero, el vértice esta fuera del origen, en este caso el vértice se haya así:

$x = \dfrac{-b}{2a}$; $y = f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$ El vértice será (x, y)

El eje de simetría tiene la ecuación: $x = \dfrac{-b}{2a}$

Cuando *a*; es decir, el coeficiente de la variable al cuadrado toma valores positivos o negativos, la gráfica cambia.

-) Si $a > 0$, las ramas de la parábola abren hacia arriba a partir del vértice.
-) Si $a < 0$, las ramas de la parábola abren hacia abajo a partir del vértice.

Ejemplo 1:

Dada la función $f(x) = 3x^2$ hacer la descripción correspondiente.

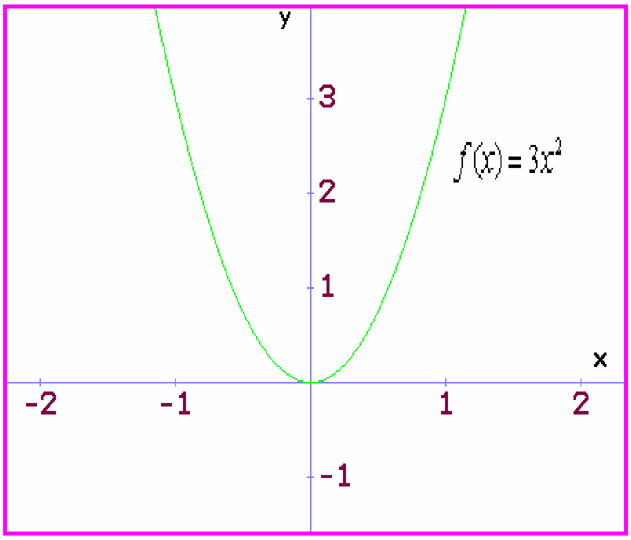
Solución:

Como la ecuación dada es cuadrática, se puede inferir que se trata de una función cuadrática. Se observa que b = c = 0, luego el vértice esta en el origen. El dominio son todos los reales, ya que la variable *x* puede tomar cualquier valor real.
La imagen: Recordemos que se despaja x y se observa que valores puede tomar y ó f(x).

$y = f(x) = 3x^2 \Rightarrow\Rightarrow x^2 = \frac{y}{3} \Rightarrow\Rightarrow x = \sqrt{\frac{y}{3}}$, esto nos indica que *y* solo puede tomar valores positivos, ya que las raíces pares solo tiene solución en reales para valores positivos y cero. La imagen serán los Reales no negativos. ($\mathbf{R}^*$)

El eje de simetría será: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2} = 0$

Como *a* > 0, ya que a = 3, entonces las ramas abren hacia arriba a partir del vértice.
La función es decreciente en $(-\infty \ ,0)$ y creciente en $[0\ ,\infty)$



Por teoría de polinomios, sabemos que una ecuación cuadrática tiene dos ceros, que es donde la curva corta la eje x, para este caso el corte es en cero, luego dicho polinomio tiene dos ceros reales iguales.

No debemos olvidar la teoría de polinomios analizada en la parte de ecuaciones polinómicas, es de mucha ayuda para el estudio de funciones.

Ejemplo 2:

Hacer la descripción de la función: $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$

Solución:

El dominio: todos los reales.

La imagen: Son los reales que sean mayores o iguales a $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$, ya que a > 0.

Primero se calcula $\frac{-b}{2a} : \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2(2)} = -2$

Ahora se determina $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$. Veamos: $f(-2)=2(-2)^2+8(-2)+5=-3$

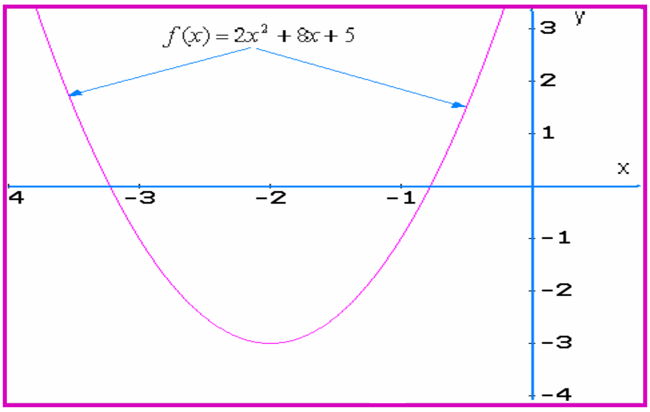
Finalmente se establece que la imagen son los reales mayores o iguales que -3.

Vértice: V(-2, -3)

Simetría: Se debe reemplazar x por – x en la función:
$f(-x)=2(-x)^2+8(-x)+5=2x^2-8x+5$. Se observa que f (- x) es diferente a f (x). Así no hay simetría par.
Si factorizamos el signo se obtiene: $f(-x)=2x^2-8x+5=-(-2x^2+8x-5)$. Tampoco se cumple que f (- x) = - f (x), luego no hay simetría impar, por consiguiente la función no tiene simetría.

Monotonía: Como a > o, las ramas abren hacia arriba a partir del vértice. Luego la función presenta la siguiente monotonía:
De $(-\infty,-2)$ la función es decreciente.
De $[-2,\infty)$ la función es creciente.

La gráfica:



Como ejercicio, se debe determinar los ceros del polinomio; es decir, donde la curva corta al eje x.

Muestre que dichos ceros son: -0,775 y -3,224

Ejemplo 3:

Hacer la descripción de la función cuya ecuación es $f(x)=-3x^2+12x-5$
Solución:

Dominio: Todos los reales

Imagen: Todos los reales que sean menores o iguales que $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$, ya que a < 0.

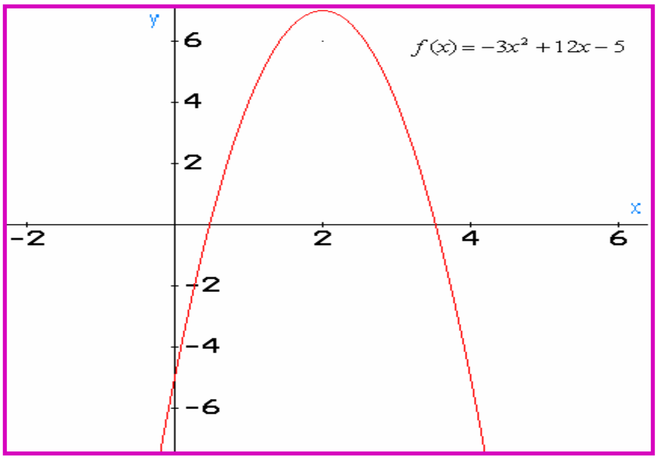
$\frac{-b}{2a}=\frac{-12}{2(-3)}=2$. Ahora: $f(2)=-3(2)^2+12(2)-5=7$. La imagen son todos los reales menores o iguales que 7.

Vértice V(2, 7)

Simetría: Como en el caso anterior se infiere que NO hay simetría, *por favor comprobarlo en el grupo colaborativo.*

Monotonía: La curva presenta la siguiente monotonía:
De $(-\infty, 2)$ la función es creciente.
De $[2, \infty)$ la función es decreciente.

La grafica:



Mostrar que los ceros de esta curva son: 0,472 y 3,527

EJERCICIOS

Dada la expresión $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ para x ≠ 1, Hallar el valor de la función dada:

1. $f(x)=3x$ Rta: 3

2. $f(x)=1-3x$ Rta: -3

3. $f(x)=\sqrt{x}$ Rta: $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$

Dadas las siguientes funciones, hacer la descripción identificando: Dominio, Imagen, monotonía, simetría, gráfica.

4. $f(x)=-4x+6$

5. $f(x)=x+|x|$

6. $f(x)=[|2x|]$

7. $f(x)=|4x|$

8. $f(x)=2x^2-5x$

9. $f(x)=3x^2+4x-10$

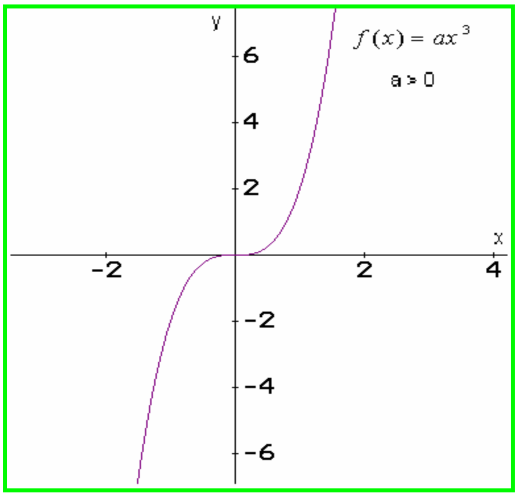
Función Cúbica:

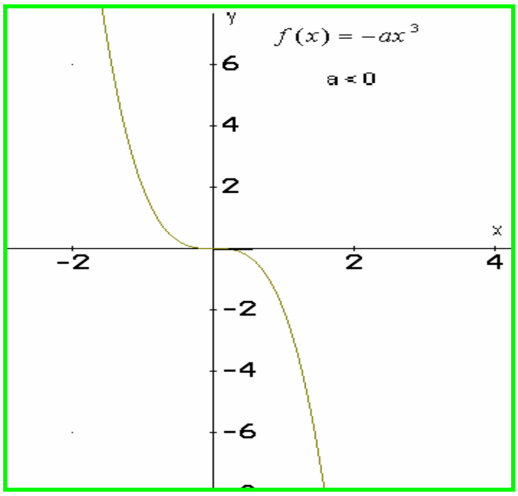
Su nombre es dado por el tipo de polinomio que la describe, un polinomio de tercer grado.

> **DEFINICION:**
> Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde a, b, c y d son reales y a $\neq 0$. Se define como una función cúbica.

El dominio y la imagen están en los reales $f : R \to R$

Cuando b = c = d = 0, se obtiene la función característica $f(x) = ax^3$. Esta función es impar. Cuando a > 0 la función es creciente y cuando a < 0 la función es decreciente.





Como se observa en la gráfica, la función cúbica presenta simetría respecto al origen y es monótona.

Función Polinómica:

Las funciones polinómicas son aquellas cuya regla esta dada por el polinomio que la define, por lo tanto el grado de la función será el grado del polinomio.

> **DEFINICION:**
> Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + ax + a_0$, donde a_u, a_{n-1}, …, a y a_0 son reales y a_n $\neq 0$ y n ϵ Z^+. Se define como una función polinómica.

Estas funciones se caracterizan porque el dominio y su imagen están en los reales; es decir:

$f : R \to R$

Según esta definición las funciones lineales, cuadráticas y cúbicas son polinómicas, solo que éstas se estudiaron por separado, por su importancia y características.

Auque analizar funciones polinómicas requiere de sólidos conocimientos en polinomios y buena cantidad de ejercicios modelos, lo presentado en las temáticas de polinomios y funciones nos pueden servir como base para adquirir sólidos conocimientos en el tema.

Ejemplo 1:

Sea la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$:
Hacer la descripción de dicha función.

Solución:

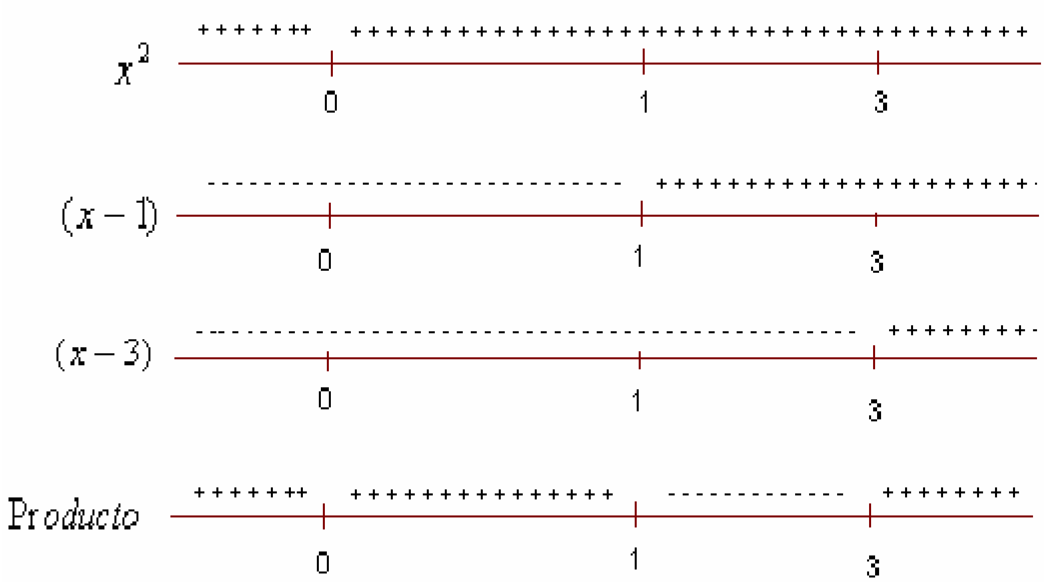
Dominio: Los reales, ya que la variable *x* puede tomas cualquier valor real.

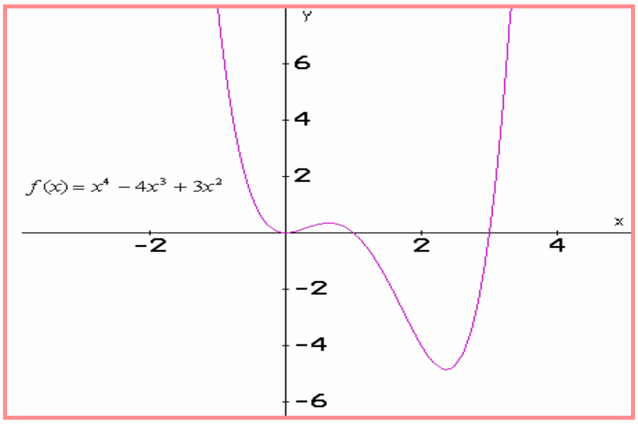
Imagen: Los reales, ya que la variable *y* toma también valores reales.

Monotonía: Las funciones polinómicas por lo general no son monótonas, ya que pueden ser crecientes y decrecientes.

Simetría: Si se reemplaza *x* por – *x*, tenemos: $f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^3 + 3(-x)^2 = x^4 + 4x^3 + 3x^2$
Así no se cumple f (-x) = f (x), tampoco f (- x) = - f (x). La función no tiene simetría.

Gráfica: Para hacer un bosquejo de la gráfica, se puede primero identificar los ceros del polinomio, lo que se hace linealizándolo: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 = x^2(x^2 - 4x + 3) = x^2(x-1)(x-3)$. Entonces los ceros del polinomio son x = 0, x = 1, x = 3.
Por el diagrama de signos, se puede identificar cómo se comporta la curva.





Con el diagrama de signos se infiere que la función presenta la siguiente curvatura:
Positiva en los intervalos:

$$(-\infty ,0) \cup (0,1) \cup (3, \infty)$$

Negativa en el intervalo:

$$(1\,,3\,)$$

En la gráfica se puede corroborar lo obtenido en el diagrama de signos.

La gráfica también nos deja ver que la imagen son los y ≥ - 5.

Ejemplo 2:

Hacer la descripción de la función que tiene como ecuación:

$f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$

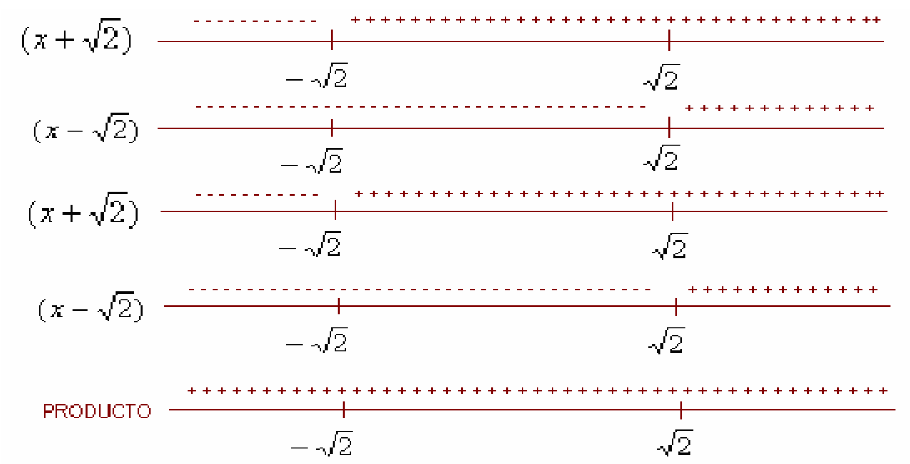
Solución:

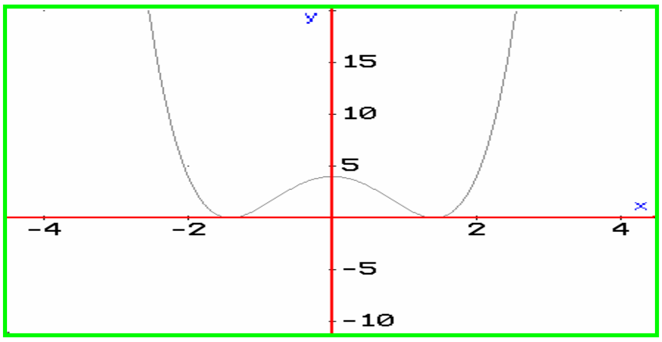
Dominio: Todos los reales
Imagen: Según la ecuación la variable *x* siempre será positiva, luego la imagen serán los reales no negativos.
Monotonía: La función no tiene monotonía, ya que presenta crecimiento y decrecimiento.
Simetría: $f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 + 4 = x^4 - x^2 + 4$ Se observa que f (- x) = f (x), luego la función tiene simetría par, así es simétrica respecto al eje *y*.
Gráfica: Identifiquemos los ceros.

$f(x) = x^4 - 4x^2 + 4 = (x^2 - 2)^2 = (x^2 - 2)(x^2 - 2)$

$f(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 2) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

Como el polinomio es de grado cuarto, se tienen cuatro ceros. Con ayuda del diagrama de signos, podemos identificar la curvatura de la grafica.

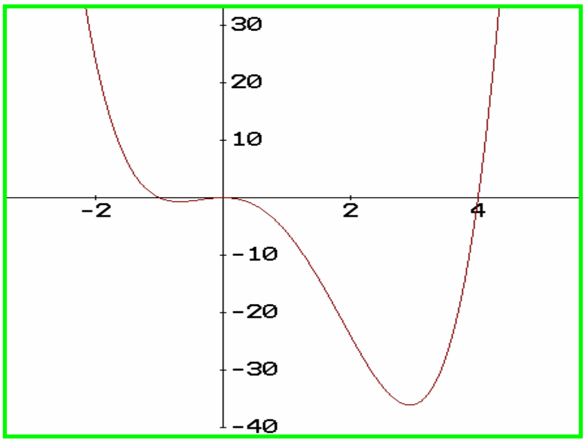




La gráfica, nos corrobora que la imagen de la función son los reales no negativos; además, que la función es positiva, ya que en el diagrama de signos el producto es positivo en todo su recorrido.

Ejemplo 3:

Dada la gráfica, identificar las características de la función.



Hacer el ejercicio con el pequeño grupo colaborativo y corroborar la solución con el tutor.

Ayuda: Es una función de cuarto grado.

Función Racional:

El cociente de dos número enteros origina una número racional, análogamente, el cociente de dos polinomios originan las funciones racionales.

DEFINICION:

Sea $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde $q(x) \neq 0$ a f (x) se le denomina función racional.

El dominio de la funciones racionales son todos los reales excepto aquellos que hagan a q(x) = 0. Respecto a la imagen, depende del tipo de función, ya que cada una tiene sus particularidades, al igual a que la monotonía y simetría.
La gráfica se una función racional se puede hacer identificando las características descritas, pero además el límite hasta donde puede llegar la

curva según las restricciones del dominio y la imagen. Los límites de las curvas se pueden identificar por medio de las llamadas Asíntotas.

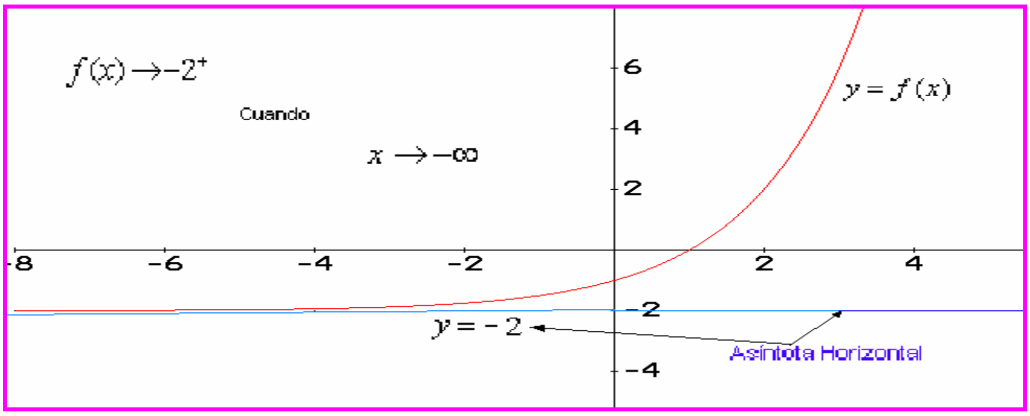
ASINTOTA: En términos muy sencillos una asíntota es una recta que limita la curva de una función racional. Podemos decir que la Asíntota es como la Cebra que hay en los semáforos en donde no debe estar el carro cuando éste esta en rojo. La Asíntota es la cebra donde no puede estar la curva, solo muy cerca.

Las Asíntotas son de tres tipos al saber:

Asíntotas Horizontales: Se dice que la recta y = c es una asíntota horizontal de la función f(x), si se cumple alguno de los siguientes enunciados:

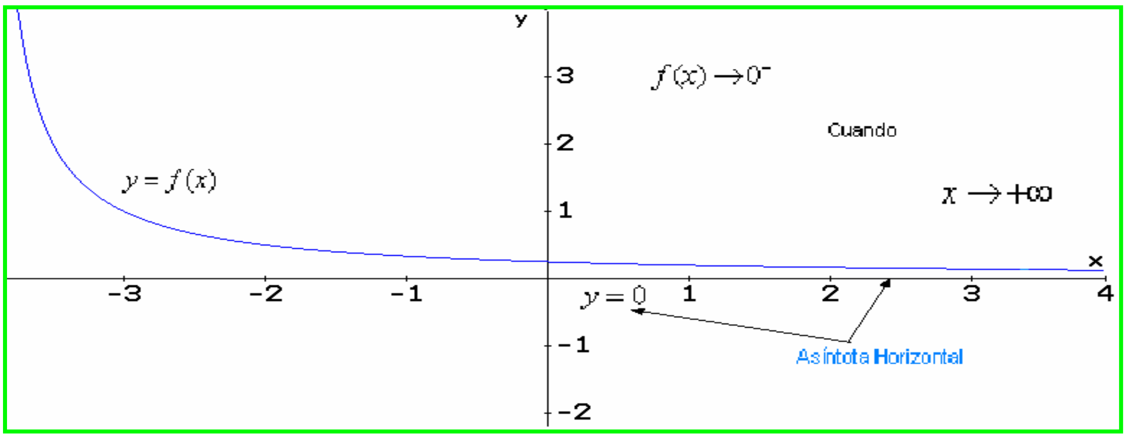
$$f(x) \to c^{+} \text{ Cuando } x \to \pm\infty \quad \text{o} \quad f(x) \to c^{-} \text{ Cuando } x \to \pm\infty$$

Lo anterior significa, que la función f (x) tiende a *c* por la derecha (c^+) ó por la izquierda (c^-) cuando *x* tiende a más ó menos infinito.



La gráfica anterior muestra que f (x) tiende a menos dos por la derecha, cuando x tiende a menos infinito.

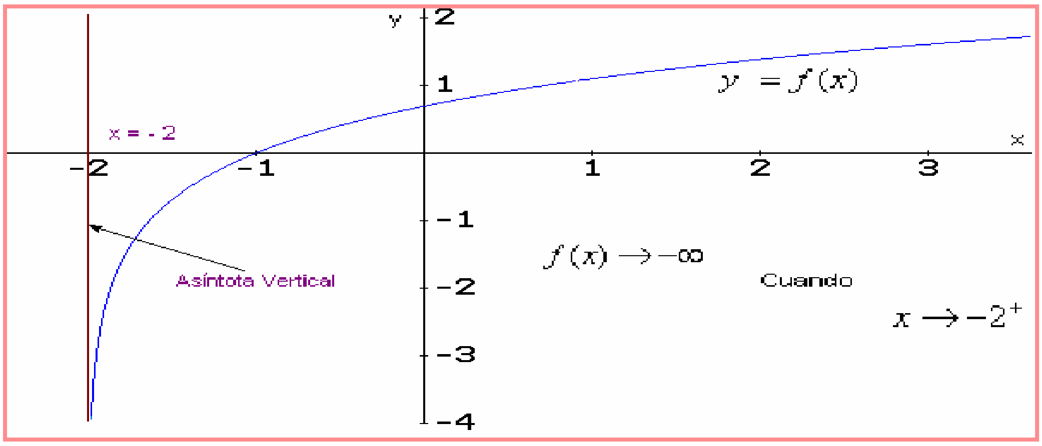
En la siguiente gráfica se puede observa que al función f (x) tiende a cero por la izquierda, cuando x tiende a más infinito.



Asíntotas Verticales: Se dice que la recta x = a es una asíntota vertical de la función f(x), si se cumple alguno de los siguientes enunciados:

$$f(x) \to \pm\infty \ \text{ Cuando } \ x \to a^{+} \quad \text{o} \quad f(x) \to \pm\infty \ \text{ Cuando } \ x \to a^{-}$$

Lo anterior significa, que la función f (x) tiende a más o menos infinito, cuando *x* tiende a *a* por la derecha o por la izquierda.



En la gráfica anterior se puede observar que cuando *x* tiende a menos 2 por la derecha, la función f (x) tiende a menos infinito.

Asíntotas Oblicuas: Cuando una recta es asíntota de una curva, pero dicha recta no es vertical tampoco horizontal, se dice que oblicua.

$f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ Es una función racional, donde el grado de p (x) es **n** y el de q (x) es **n – 1**, entonces f (x) tendrá una asíntota oblicua de la forma $y = ax + b$.

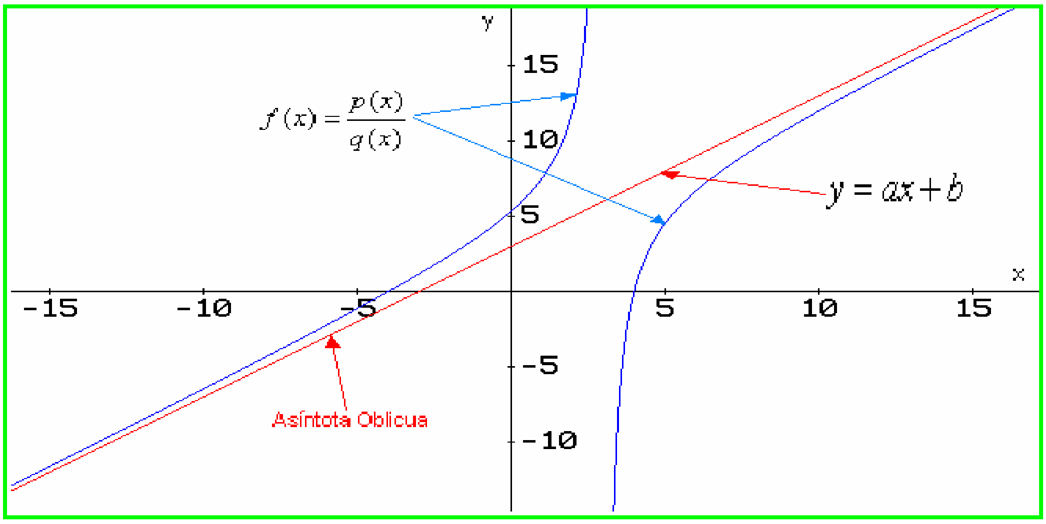
El trabajo consiste en saber cómo hallar dichas asíntotas, veamos:

$f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, como el grado de p(x) es uno mayor que el grado de q(x).

Al hacer la división: $\dfrac{p(x)}{q(x)} = h(x) + \dfrac{R}{q(x)}$ Donde *h (x) = ax + b*; es decir, una ecuación lineal, R es el residuo. Luego, cuando $x \to \pm\infty$ entonces $\dfrac{R}{q(x)} \to 0$

Por lo anterior $f(x) \to ax + b$

Por consiguiente la asíntota oblicua será le ecuación *y = ax + b*, obtenida al hacer la división entre los polinomios de la función racional.



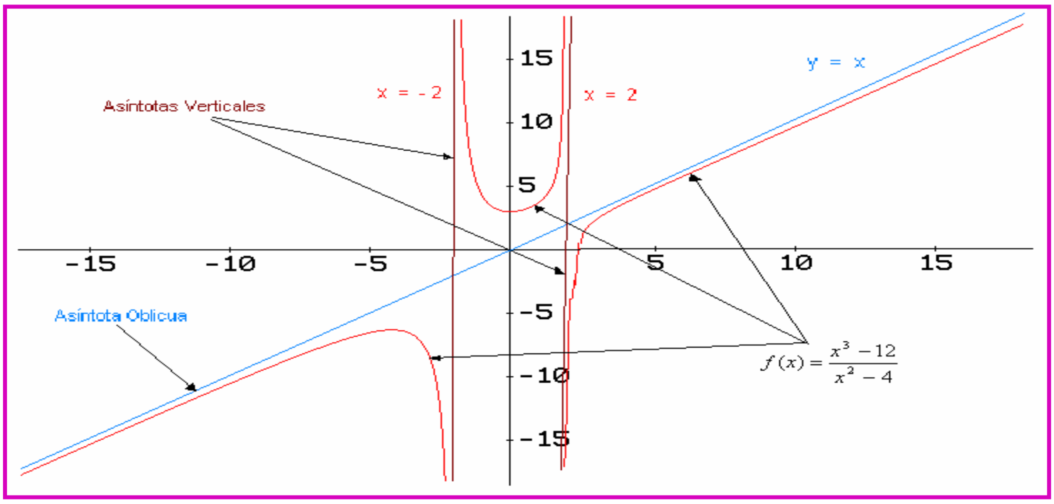
Ejemplo 1:

Describir la función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 12}{x^2 - 4}$$

Solución:

Dominio: Todos los reales diferentes de 2 y -2
Imagen: Todos los reales
Monotonía: La función no es monótona, ya que crece y decrece en su dominio.
Simetría: Al reemplazar *x* por – *x*, no se presenta el caso de función par tampoco impar.
Asíntotas:
HORIZONTALES: No tiene ya que no se cumple ninguna de las opciones para este tipo de asíntota.
VERTICALES: Se presentan varios casos:
Cuando $x \to 2^+$ entonces $f(x) \to -\infty$
Cuando $x \to 2^-$ entonces $f(x) \to +\infty$
Por otro lado:
Cuando $x \to -2^+$ entonces $f(x) \to +\infty$
Cuando $x \to -2^-$ entonces $f(x) \to -\infty$
Por consiguiente se presenta asíntota vertical en x = -2 y x = 2.
OBLICUAS: Cuando se hace la división de la expresión racional, se obtiene una ecuación lineal de la forma y = x.
Gráfica:



Ejemplo 2:

Para la función: $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$

Hacer la descripción correspondiente.

Solución:

Dominio: Todos los reales diferentes de 2
Imagen: Todos los reales diferentes de cero.
Monotonía: La función no es monótona, ya que en su dominio crece y decrece, lo veremos en la gráfica.
Simetría: Si reemplazamos a x por –x en la función, no presenta ninguna de las alternativas de simetría.
Asíntotas:

HORIZONTALES:

Cuando $x \to +\infty$, entonces $f(x)=\dfrac{3}{\infty-2}=\dfrac{3}{\infty}\to 0^+$.

Cuando $x \to -\infty$, entonces $f(x)=\dfrac{3}{-\infty-2}=\dfrac{3}{-\infty}\to 0^-$.

Así se presenta una asíntota horizontal en y = 0.

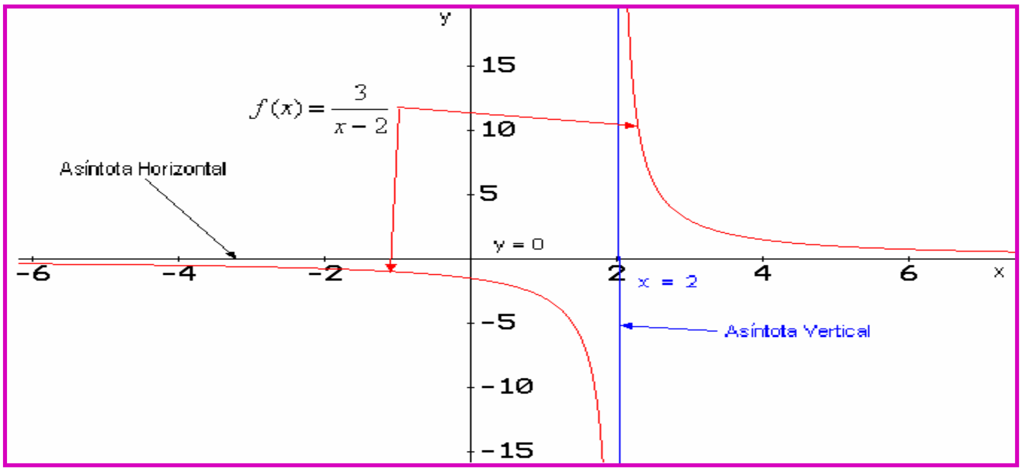
VERTICAL:

Cuando $x \to 2^+$ entonces $f(x)=\dfrac{3}{2^+-2}=\dfrac{3}{0^+}\to +\infty$

Cuando $x \to 2^-$ entonces $f(x)=\dfrac{3}{2^--2}=\dfrac{3}{0^-}\to -\infty$

Así se presenta una asíntota vertical en x = 2.

Gráfica:



La función no presenta asíntotas oblicuas, identifique la causa del porque.

Función Radical:

Cuando el polinomio que describe la función esta dentro de un radical, se le llama función radical.

DEFINICION:

Sea $f(x)=\sqrt[n]{p(x)}$, para n par y n ϵ Z^{+} Se dice que es una función radical.

El dominio de este tipo de funciones son los reales que no hagan el radicando negativo; es decir, $p(x) \geq 0$. La imagen son los reales positivos, ya que la raíz puede tomar dos valores positivo ó negativo, pero para que sea función solo puede tomar uno de los dos. Estas funciones por lo general son monótonas. Las funciones radicales no son simétricas.

Cuando el índice de la raíz es impar, el dominio son todos los reales.

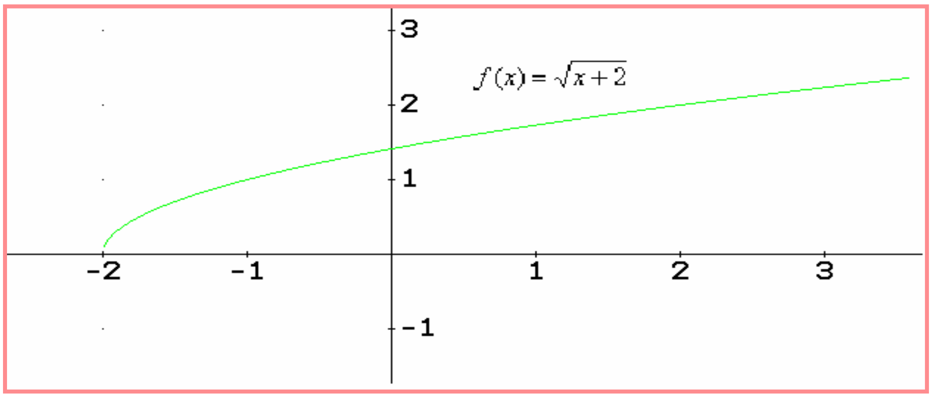
Ejemplo 1:

Dada la función $f(x)=\sqrt{x+2}$

Identificar sus características.

Solución:

Dominio: Como $x + 2 \geq 0$, entonces $x \geq -2$. Así el dominio son los reales mayores o iguales a menos dos.
Imagen: Los reales no negativos.
Monotonía: La función es creciente ya que para un $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$
Simetría: Reemplazamos x por – x. $f(-x)=\sqrt{-x+2}=-\sqrt{x-2}$, no hay simetría, ya que no se cumple $f(-x) = -f(x)$ tampoco $f(-x) = f(x)$.
Gráfica:

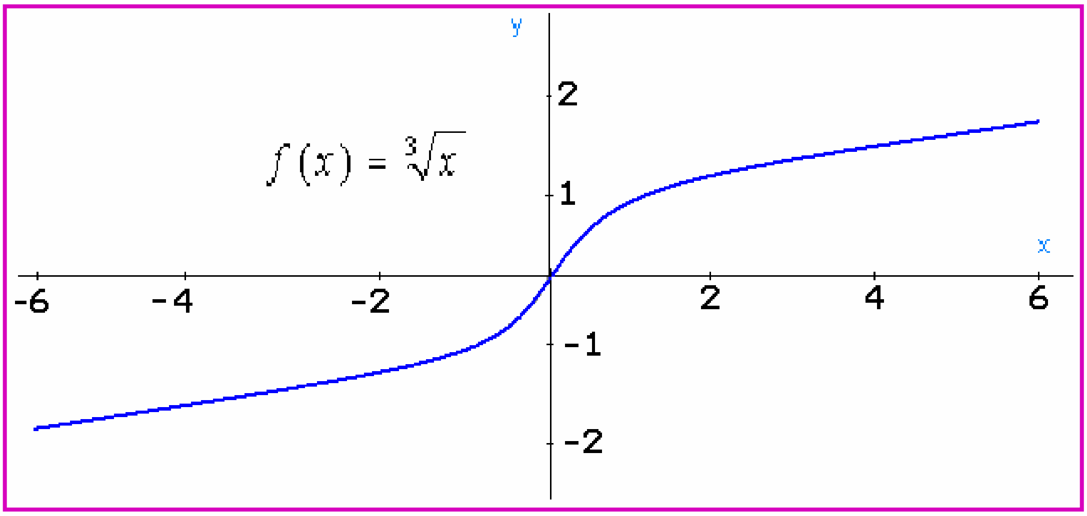


Ejemplo 2:

Describir la función: $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Solución:

Dominio: Todos los reales.
Imagen. Todos los reales
Monotonía: La funciones es creciente.
Simetría: $f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$ Se cumple que f (-x) = - f (x). La función es impar, luego es simétrica respecto al origen de coordenadas.
Gráfica:



Ejemplo 3:

Analizar la función: $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x-4}}$

Solución:

Dominio: Son todos los reales para los cuales $\frac{1}{x-4} > 0$ Como el numerador siempre es positivo, entonces el que determina el valor que puede tomar la variable *x* es el denominador, así:

x – 4 > 0, luego x > 4. El dominio son todos los reales mayores que 4.

Imagen: Para este tipo de función se sabe que son los reales no negativos, pero para este caso como x – 4 solo puede ser estrictamente mayor, entonces la imagen serán los reales positivos.

Monotonía: si se tomas dos valores de x, digamos $x_1 = 5$ y $x_2 = 6$, al reemplazar en la función se puede observar que $f(x_1) > f(x_2)$, luego la función es decreciente, por consiguiente es monótona.

Simetría: Esta función no es simétrica, ya que no cumple que f (-x) = f (x), tampoco f (-x) = - f (x).

Asíntotas:

HORIZONTALES:

Cuando $x \to +\infty$, entonces. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{\infty - 4}} \to 0$

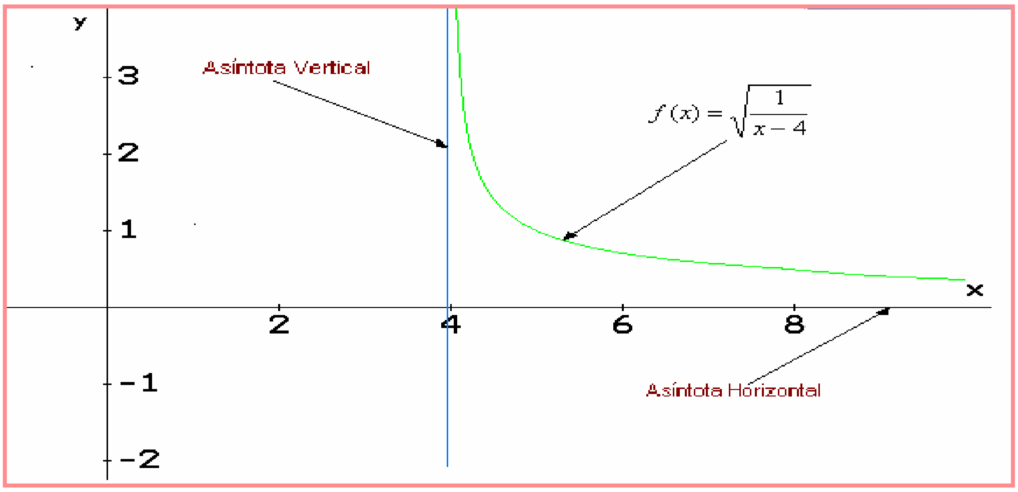
Así se presenta una asíntota horizontal en y = 0.

VERTICAL:

Cuando $x \to 4^+$ entonces $f(x) = \sqrt{\frac{1}{4^+ - 4}} \to +\infty$

Así se presenta una asíntota vertical en x = 4.

Gráfica:



EJERCICIOS

Para las funciones dadas, identificar dominio, imagen, simetría si la tiene, monotonía si la tiene, asíntotas si las tiene y hacer una bosquejo de la gráfica.

1. $f(x) = x^3 - 4$

2. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$

3. $g(x) = x^4 + 7x^3 + 12x^2$

4. $g(x) = x^4 + 2x^3$

5. $h(x) = \dfrac{2}{x+1}$

6. $h(x) = \dfrac{3x}{x+4}$

7. $q(x) = \dfrac{4}{(x-2)^2}$

8. $q(x) = \dfrac{2x}{x^2-4}$

9. La concentración de un fármaco en la sangre, esta dado por la función: $c(t) = \dfrac{25t}{(t+1)^2}$ (t horas)

   a-) ¿Cual será la concentración inicial del fármaco? Rta: 0
   b-) ¿Cuanto fármaco hay a las 4 horas? Rta: 4

10. Identificar algunas aplicaciones de las funciones polinómicas y racionales en las áreas de Ingeniería, Administración, Ciencias Agrarias y Ciencias Sociales.

FUNCIONES TRASCENDENTALES:

Se consideran a las funciones cuyo modelo matemático son modelos exponenciales, logarítmicos, expresiones trigonométricas o combinaciones de estas.

Función Exponencial: Se caracteriza porque la variable esta en el exponente, luego su descripción esta bajo los principios de los exponentes. De este tipo se conocer muchas, pero con el fin de comprenderlas se analizarán algunas.

Función Exponencial Base a:

Son aquellas cuya base es un número real positivo y el exponente la variable independiente.

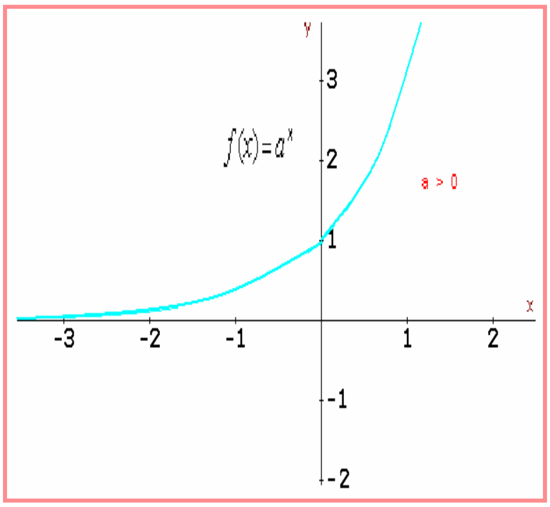
> **DEFINICION:**
> Sea $f(x) = a^x$, para $a > 0$ y $a \neq 1$. Se define como una función exponencial de base a.

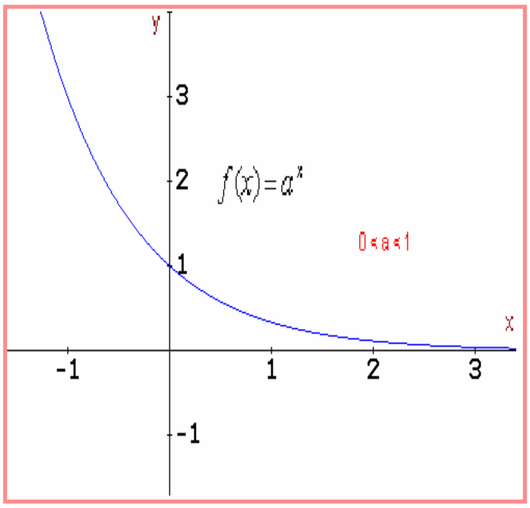
La función exponencial tiene las siguientes características:

Dominio: Es el conjunto de los reales, ya que la variable *x* puede tomar cualquier valor real en el modelo matemático que la representa.
Imagen: Esta en le conjunto de los reales positivos, debido a que para cualquier valor de *x*, la función no toma valores negativos.

La relación: $f \ : R \ \rightarrow \ R^+$

El Intercepto: Esta función corta al eje y en el valor y = 1. La explicación es que para x = 0, la imagen siempre es y = 1.
Monotonía. La función exponencial es monótona. Si a > 0 la función es creciente, pero si 0 < a < 1, la función es decreciente.
Simetría*:* Este tipo de función no presenta ningún tipo de simetría.





Todas las funciones de la forma $f(x) = a^x$ tiene la misma forma, solo cambia la pendiente de la curvatura, según sea el valor de a. Así hay dos tipos de funciones exponenciales muy particulares, que analizaremos a continuación.

Función Exponencial Decimal:

Es aquella función cuya base en 10.

DEFINICION:
Sea $f(x) = 10^x$, Se define como una función exponencial decimal

La función exponencial decimal tiene las propiedades de una función exponencial de base a.

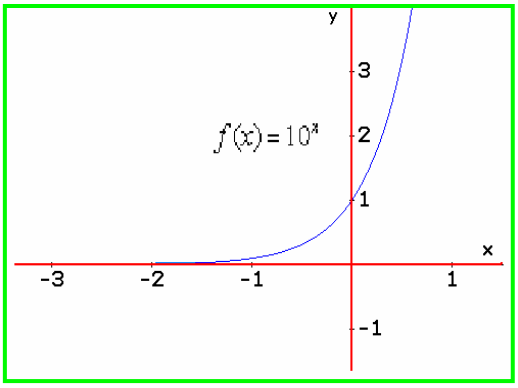
Función Exponencial Natural:

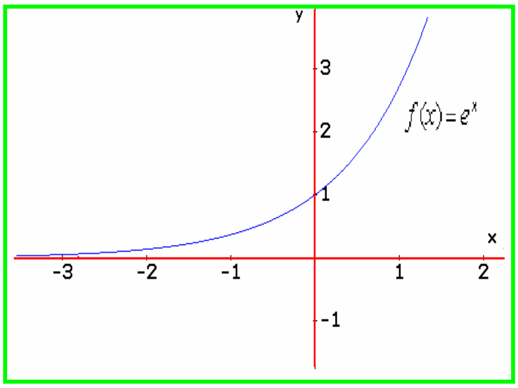
Es aquella función cuya base en el número de Euler, representado por una *e.*

DEFINICION:
Sea $f(x) = e^x$, Se define como una función exponencial natural

El gran matemático Suizo Euler obtuvo el número e desarrollando la expresión

$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x \rightarrow 2{,}7182..$ a medida que $x \longrightarrow \infty$





El numero e es un número es irracional, pero se ha tomado como la base de la función exponencial natural.

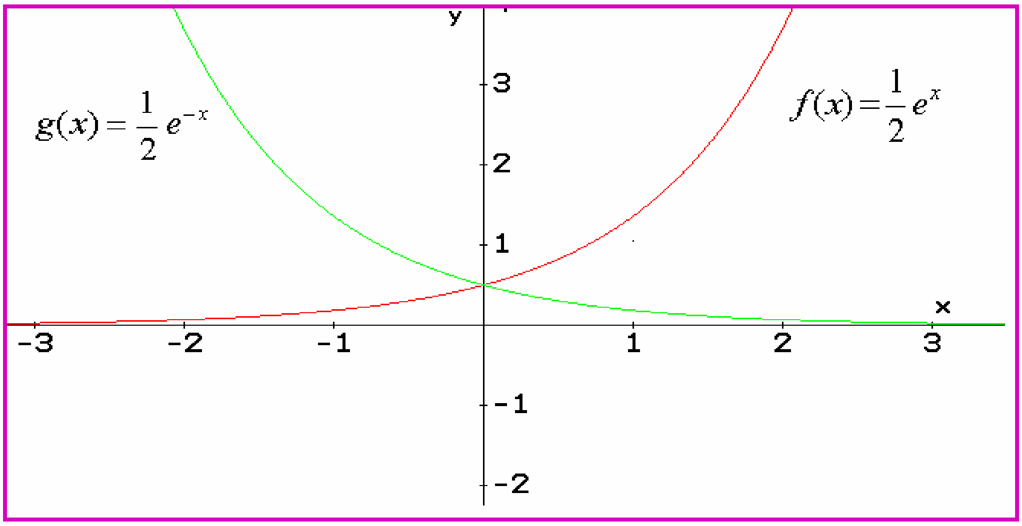
En la gráfica, se observa que la función exponencial decimal es más pendiente que la natural.

Ejemplo 1:

Analizar la función $f(x)=\frac{1}{2}e^{x}$ y $g(x)=\frac{1}{2}e^{-x}$

Solución:

Todas las propiedades dadas para función exponencial se cumplen para estas funciones, solo veamos las gráficas.



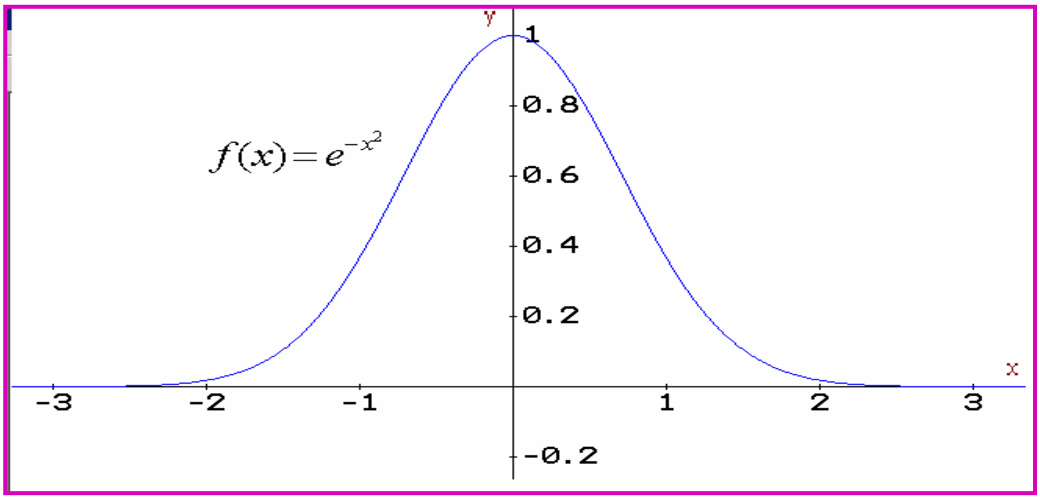
Estas dos funciones son la base de las llamadas funciones hiperbólicas, que se analizarán más a adelante.

Ejemplo 2:

Describir la función: $f(x)=e^{-x^2}$

Solución:

Para esta función el dominio son todos los reales, pero la imagen esta restringida a el intervalo (0, 1] Es simétrica respecto al eje y, creciente en el intervalo $(-\infty,0]$ y decreciente ene. E intervalo $(0,\infty)$
Analizar estas características con el grupo colaborativo y luego compartir con el Tutor.



Función Logarítmica: El logaritmo es una operación inversa a la potenciación, análogamente la función logarítmica es inversa a la función exponencial. Los principios, leyes y propiedades de los logaritmos son aplicables a este tipo de función.

Antes de comenzar a trabajar con funciones logarítmica, es pertinente recordar algo sobre los logaritmos.

Propiedades de los Logaritmos:

Aunque por estudios previos, todos tenemos algo de conocimientos sobre los logaritmos, en el curso de *Matemáticas Básicas*, se estudian con detenimiento, pero se considera pertinente hacer referencia a algunas propiedades de esta operación.

Inversa	$y = Log_a(x) \Leftrightarrow y^a = x$
Suma	$Log_a(x) + Log_a(y) = Log_a(x * y)$
Diferencia	$Log_a(x) - Log_a(y) = Log_a(\frac{x}{y})$
potencia	$Log_a(x)^k = kLog_a(x)$
Nulo	$Log_a(1) = 0$
Operación Opuesta	$Log_a(a)^x = a^{Log_a(x)} = x$

Cambio de Base:

En ocasiones se tiene una función logarítmica en base *a,* pero se requiere trabajar una función con otra base, para esto existe un principio que permite cambiar la base de una función logarítmica sin que sus propiedades se alteren.

Sea $y = Log_a(x)$ se desea que la función se transforme en una nueva base, digamos *b*, entonces:

$y = Log_a(x) \Rightarrow a^y = x$ Aplicamos logaritmo en la nueva base a la última ecuación:

$a^y = x \Rightarrow Log_b(a^y) = Log_b(x)$ Por la propiedad de potencia para logaritmo, se tiene:

$yLog_b(a) = Log_b(x)$ Despejamos la variable y, se obtiene:

$$y = \frac{Log_b(x)}{Log_b(a)}$$

Retomando la función logarítmica inicial, ésta se puede escribir así:

$$\boxed{Log_a(x) = \frac{Log_b(x)}{Log_b(a)}}$$

Ejemplo 1:

Dada la función $y = \log_2(x)$, transformarla a base e.

Solución:

Para el caso a = 2 y b = e, entonces reempleando:

$$\log_2(x) = \frac{Ln(x)}{Ln(2)}$$

Ejemplo 2:

Trasformar de la base dada a base 4, la función $y = Log(x)$

Solución:

$$Log(x) = \frac{Log_4(x)}{Log_4(10)}$$

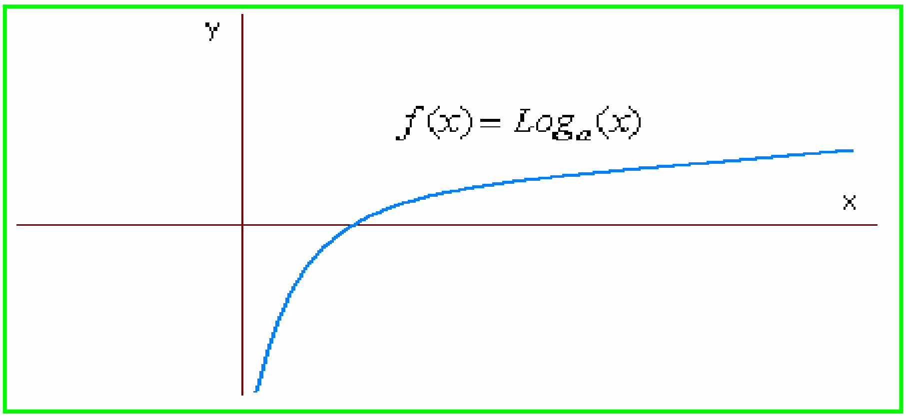
Función Logarítmica Base a: Lo que diferencia a las funciones logarítmicas es la base, así veremos algunas funciones logarítmicas muy particulares.

DEFINICION:
Sea $f(x) = Log_a(x)$, para a > 0 y a ≠ 1. Se define como una función logarítmica de base a.

Al igual que la función exponencial, la función logarítmica tiene algunas propiedades.

El Dominio: Para las funciones logarítmicas, el dominio son todos los reales positivos, ya que el logaritmo de reales negativos no existen.
La Imagen: La imagen de la función logarítmica son todos los reales.

Entonces la relación es: $R^+ \rightarrow R$
La Monotonía: La función logarítmica es creciente para a > 1 y decreciente para 0 < a < 1. Entonces la función logarítmica es monótona.
Asíntotas: Presenta una asíntota vertical en x = 0.
Intercepto: La curva corta al eje x en x = 1, pero no corta al eje y.



Función Logarítmica Base 10: Esta función se conoce comúnmente como la función logarítmica decimal.

DEFINICION:
Sea $f(x) = Log_{10}(x) = Log(x)$. Se define como una función logarítmica decimal

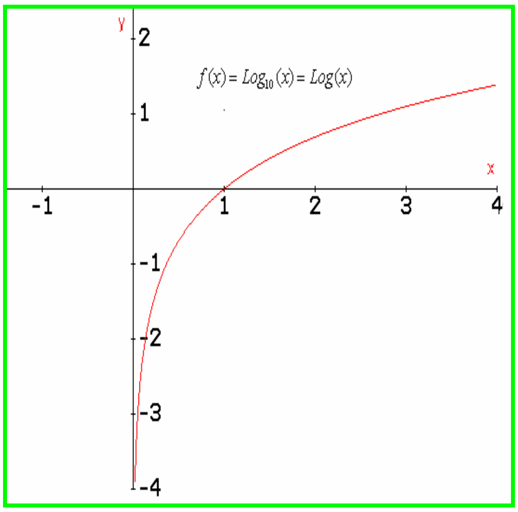
Como se observa en la definición, la función logarítmica decimal se escribe comúnmente como Log(x), es una de las funciones logarítmicas más conocidas y utilizadas. Todas las propiedades de los logaritmos son aplicables a esta función.

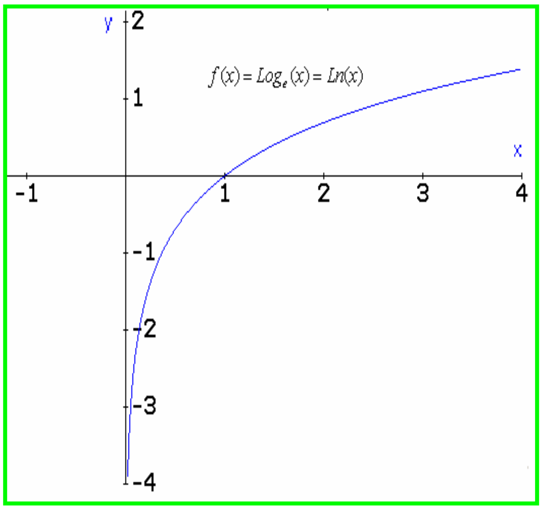
Función Logarítmica Base e: Esta función se conoce comúnmente como la función logarítmica natural.

DEFINICION:

Sea $f(x) = Log_e(x) = Ln(x)$. Se define como una función logarítmica natural

Como se observa en la definición, la función logaritmo natural se escribe comúnmente como Ln(x), también es una de las funciones logarítmicas más conocidas y utilizadas. Todas las propiedades de los logaritmos, también son aplicables a esta función.





En las gráficas se puede ver que la función logaritmo natural es más pendiente que la función logaritmo decimal. Pero las dos son crecientes en su dominio, también se observa la asíntota en x = 0.

EJERCICIOS

Describir las funciones dadas a continuación, incluyendo la gráfica.

1. $f(x) = 2^x$

2. $g(x) = 4^x$

3. $h(x) = 3^x + 2$

4. $I(x) = 10^{x-2}$

5. $J(x) = e^{x-1}$

6. $M(x) = e^x + 4$

Dadas las funciones logarítmicas, describirlas completamente según lo estudiado en ellas.

7. $f(x) = Log_2(4x)$

8. $g(x) = Log_4(x)$

9. $h(x) = Log(x+4)$

10. $N(x) = Ln(2x) + 6$

11. $K(x) = Ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$

12. La relación entre el ingreso anual *x* y el número de individuos *y* en un país capitalista esta dado por la función: $P(x) = Log(y) - kLog(x)$ ¿Cuál será el número de individuos en un país capitalista donde k = 2 y b = 12.000, si el ingreso anual es de 10.

Rta: 120

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS:

La trigonometría fue desarrollada hace más de 2.000 años, siendo los Griegos sus gestores y el Matemático y Astrónomo ***Hiparco* de Nicea** (190-120 a d C) uno de sus representantes. Sus inicios fueron motivados por la necesidad de predecir rutas y posiciones de cuerpos celestes, para mejorar la navegación, el cálculo de tiempos y posiciones de los planetas..

Hiparco de Nicea

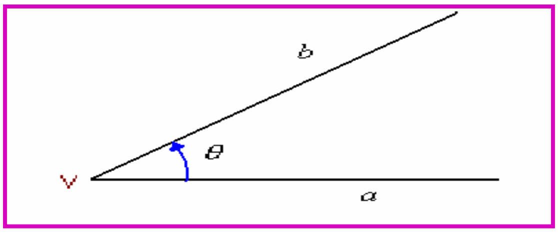
Fuente:astrocosmo.cl/biografi/b-e_hiparco.htm

El estudio de la trigonometría se centra en el estudio de los Triángulos, la palabra se deriva del griego *Trigonom* que significa Triángulo y *metres* de medición. En este capítulo solo nos centraremos en el estudio de las funciones trigonométricas, sus principios, características y aplicaciones. En el capítulo de Trigonometría se analizarán aspectos de trigonometría analítica.

Sabemos por nuestros conocimientos previos que todo triángulo tiene tres lados y tres ángulos; además, que los triángulos rectángulos hay un ángulo conocido.

Los Ángulos: En Geometría se estudiaron los ángulos, clases, propiedades y demás. Se analizaron diversas definiciones de ángulos, aquí solo se dará una definición muy sencilla y particular.

> *Un ángulo se forma cuando dos segmentos de recta se cortan en un punto llamado Vértice. A los segmentos de recta se le conocen como lado inicial y lado Terminal.*



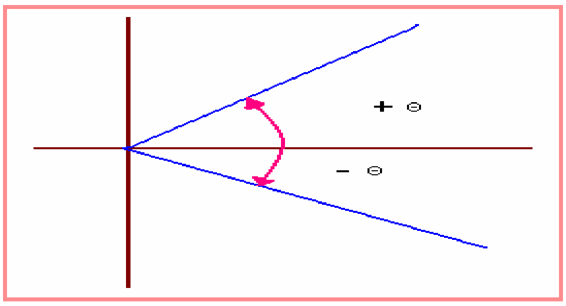
V = Vértice

a = lado inicial

b = Lado Terminal

Θ = Ángulo formado

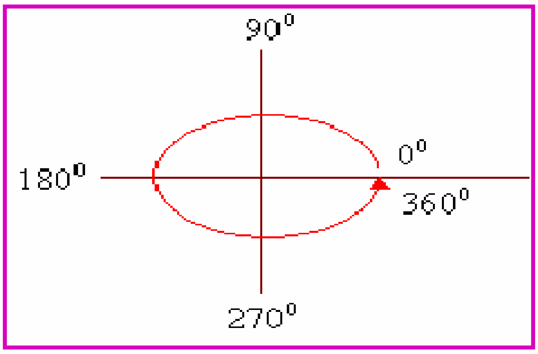
Se puede decir que un ángulo es el "Espacio formado" por los segmentos de recta que se cruzan en el vértice. Por convención un ángulo es positivo cuando se mide en sentido contrario a las manecillas del reloj y negativo cuando se mide en sentido de dichas manecillas.



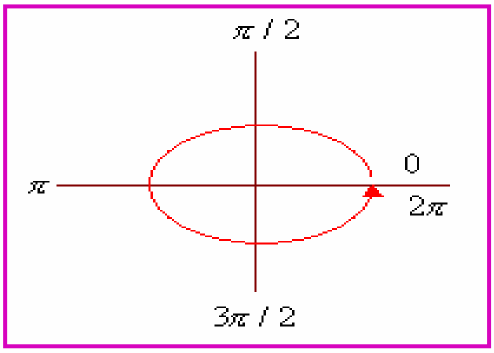
Por lo general para simbolizar los ángulos se usan letras griegas como α β λ ϑ entre otras, o letras latinas mayúsculas A, B, C, otros.

La gráfica muestra que el ángulo es positivo hacia arriba y negativo hacia abajo.

Medida de loa ángulos: La medida de los ángulos depende de la abertura o separación que presenten las dos semirrectas. Existen dos sistemas básicos para medir los ángulos. *El Sistema Sexagesimal* cuya unidad son los Grados y el *sistema Circular* cuya unidad es el Radian. Estos tienen referencias, veámoslo en la grafica siguiente.



Sistema Sexagesimal



Sistema Circular

Una vuelta equivale a 360^0 en el sistema sexagesimal y 2π en el sistema circular.

Existe un sistema de conversión entre los sistemas, según las equivalencias que se pueden ver en las gráficas.

Para convertir de radianes a grados:

Para convertir de grados a radianes.

$$\boxed{y_{Grados} = \frac{180}{\pi}(x_{Radianes})}$$

$$\boxed{x_{Radianes} = \frac{\pi}{180}(y_{Grados})}$$

Ejemplo 1:

Convertir $\pi/3$ a grados.

Solución:

Para este caso nos sirve la primera fórmula.

$$y = \frac{180}{\pi}(\pi/3) = \frac{180}{3} = 60$$

Lo anterior significa que $\pi / 3$ equivale a 60^0.

Ejemplo 2:

A cuantos radianes equivalen 120^0

Solución:

Aquí se debe cambiar de grados a radianes.

$$y = \frac{\pi}{180}(120) = \frac{12\pi}{18} = \frac{2\pi}{3}$$

Entonces 120^0 equivalen a $2\pi / 3$.

Ejemplo 3:

Cuantos radianes hay en 420^0

Solución:

$$y = \frac{\pi}{180}(420) = \frac{42\pi}{18} = \frac{7\pi}{3}$$

Ejemplo 4:

Cuantos grados y radianes hay en 3 vueltas y media.

Solución:

Como una vuelta es de 360^0 y media vuelta es de 180^0, entonces tres vueltas y media será:
$3(360^0) + 180^0 = 1.080 + 180^0 = 1.260^0$ en grados.
Para radianes.

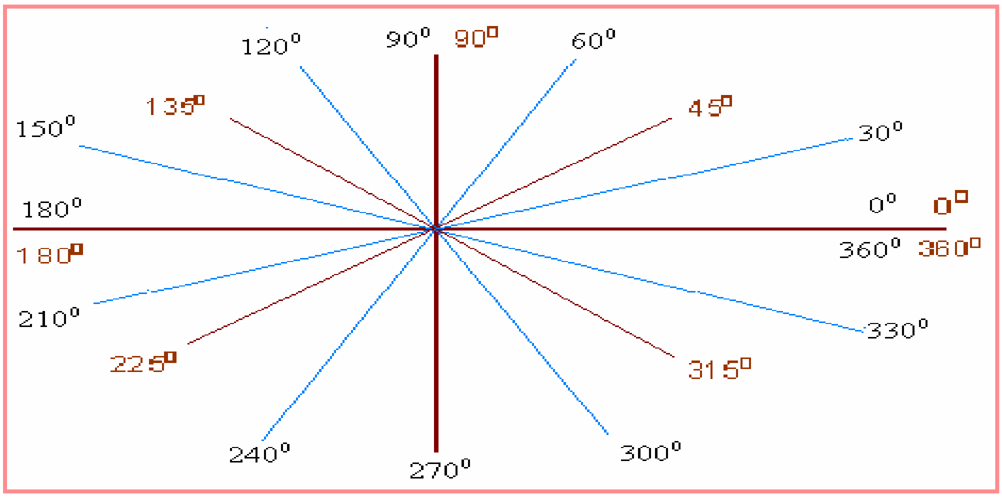
$$y = \frac{\pi}{180}(1260) = \frac{126\pi}{18} = 7\pi$$

Entonces 3 vueltas y media equivalen a 1.260^0 ó 7π

Ángulos Notables: Ángulos existen muchos, pero para facilitar el análisis de los mismos, se han establecido unos ángulos que se les han denominado ángulos notables, ya que a partir de estos se puede analizar cualquier otro. En el sistema de coordenadas rectangulares, el primer cuadrante esta comprendido entre los ángulos 0 y $\pi / 2$. El segundo cuadrante esta comprendido entre $\pi / 2$ y π, el tercer cuadrante entre π y $3\pi / 2$ y el cuarto cuadrante esta comprendido entre $2\pi / 2$ y 2π
Los ángulos notables se obtienen cuando se divide la unidad en 6 partes, así se obtienen 6 ángulos ya que 180 / 6 = 30, entonces se obtiene 6 ángulos con una medida de 30^0 cada uno en la parte superior del plano, de la misma manera en la parte inferior.

Los ángulos son: 0^0, 30^0, 60^0, 90^0, 120^0, 150^0, 180^0, 210^0, 240^0, 270^0, 300^0, 330^0, 360^0.

Pero también se pueden dividir en cuatro partes: 180 / 4 = 45, entonces se obtiene 4 ángulos con una medida de 450 cada uno. Así los ángulos son : 0^0, 45^0, 90^0, 135^0, 180^0, 225^0, 270^0, 315^0, 360^0.

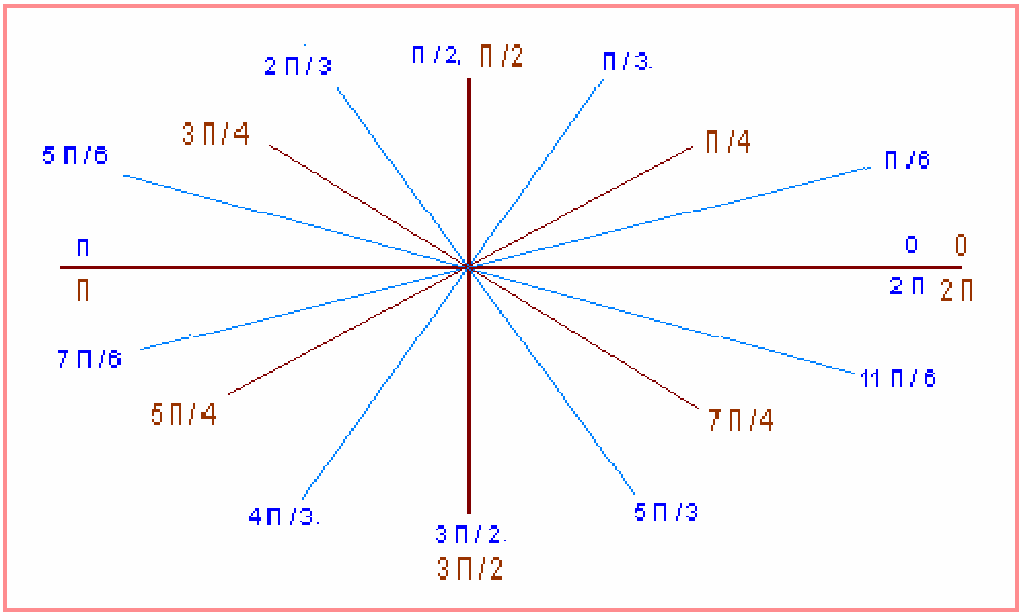


Las líneas azules muestras las 6 divisiones de la parte superior y 6 divisiones de la parte inferior. Las líneas cafés muestras las 4 divisiones de la parte superior y las 4 de la parte inferior. De esta manera se muestran los ángulos notables en grados.

Para el caso de radianes, la división es de la forma. Π / 6, así cada parte es 1/6 por la parte superior igual para la parte inferior del plano.

Los ángulos serán: 0, Π / 6, 2 Π / 6, 3 Π / 6, 4 Π / 6, 5 Π / 6, 6 Π / 6, 7 Π / 6, 8 Π / 6, 9 Π / 6, 10 Π / 6, 11 Π / 6, 12 Π / 6.

Haciendo 4 divisiones se obtienen las siguientes partes: 0, Π / 4, 2 Π / 4, 3 Π / 4, 4 Π / 4, 5 Π / 4, 6 Π / 4, 7 Π / 4, 8 Π / 4.



Las líneas azules muestran la división en 6 partes y la línea café muestra la división en 4 partes.

Resumiendo la construcción de los ángulos notables, en la siguiente tabla se presentan aquellos en los cuadrantes correspondientes.

Cuadrante / Sistema	***Sexagesimal***	***Circular***
Primer cuadrante	0^0 30^0 45^0 60^0 90^0	0 π/6 π/4 π/3 π/2
Segundo Cuadrante	120^0 135^0 150^0 180^0	2π/3 3π/4 5π/3 π
Tercer Cuadrante	210^0 225^0 240^0 270^0	7π/6 5π/4 4π/3 3π/2
Cuarto Cuadrante	300^0 315^0 330^0 360^0	5π/3 7π/4 11π/6 2π

EJERCICIOS

Dados los ángulos, hacer la conversión a radianes.

1. 15^0 Rta: $\pi/12$

2. 70^0 Rta: $7\pi/18$

3. -25^0 Rta: $67\pi/36$

4. 480^0 Rta: $8\pi/3$

5. -78^0 Rta: $141\pi/90$

Convertir a grados los siguientes ángulos dados en radianes.

6. $4\pi/3$ Rta: 240^0

7. $3\pi/8$ Rta: $67{,}5^0$

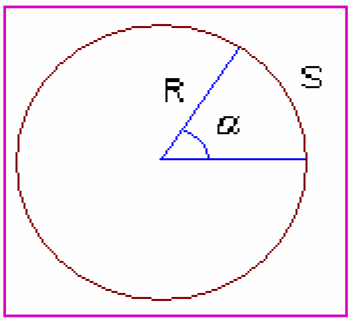
8. $-7\pi/8$ Rta: $202{,}5^0$

9. $7\pi/12$ Rta: 105^0

10. $-9\pi/12$ Rta: 225^0

Para la siguiente figura, Hallar la longitud del arco y el área del sector circular

11.



$R = 8$ cm.
$\alpha = \pi / 4$

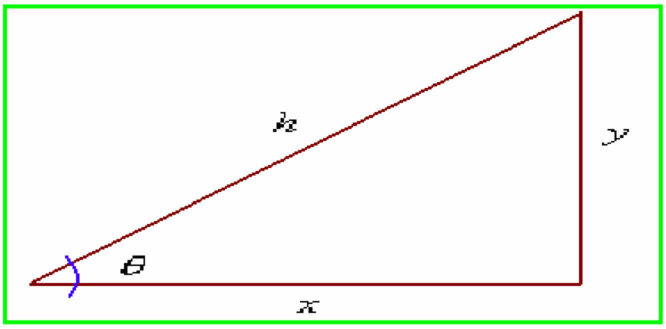
Rta: Longitud $S = 6{,}28$ cm. Área: $25{,}13$ Cm^2

12. La longitud del arco de un sector circular, en una circunferencia mide 37,7 cm. si el ángulo es de $2\pi / 3$, ¿Cuál será el valor del radio?.

Rta: 18 cm.

Relaciones Trigonométricas:

Recordando que las relaciones son interacciones entre dos conjuntos, para el caso de trigonometría la relación es el cociente entre dos longitudes. Tomando como referencia el triángulo rectángulo, se puede determinar las relaciones trigonométricas conocidas.



$y =$ Lado Opuesto

$x =$ lado adyacente

$h =$ Hipotenusa

θ = Angulo

A partir de las longitudes de x, y, h se definen 6 relaciones trigonométricas.

$$sen(\vartheta) = \frac{y}{h} \qquad \csc(\vartheta) = \frac{h}{y}$$

$$\cos(\vartheta) = \frac{x}{h} \qquad \sec(\vartheta) = \frac{h}{x}$$

$$\tan(\vartheta) = \frac{y}{x} \qquad \cot(\vartheta) = \frac{x}{y}$$

Convención:

$sen(\vartheta)$ = Seno del ángulo
$\cos(\vartheta)$ = coseno del ángulo
$\tan(\vartheta)$ = tangente del ángulo

$\cot(\vartheta)$ = cotangente del ángulo
$\sec(\vartheta)$ = secante del ángulo
$\csc(\vartheta)$ = cosecante del ángulo

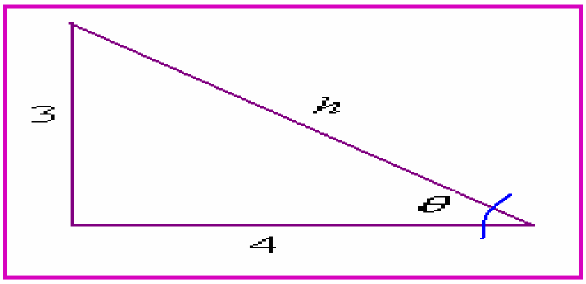
Las tres primeras relaciones se conocen como las principales y las otras tres como las complementarias. Como las relaciones originan un cociente, se puede inferir que la relación se da entre un ángulo y un número real.

Ejemplo 1:

Sea en triángulo rectángulo cuyos lados miden x = 4 y y = 3, hallar las relaciones trigonométricas correspondientes.

Solución:

Grafiquemos el triángulo correspondiente.



Primero hallamos la hipotenusa, lo que se puede hacer por medio del teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16}$$
$$h = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Así se tienen los valores de las tres longitudes, luego ya se puede definir las relaciones trigonométricas.

$sen(\theta) = \dfrac{y}{h}$ Entones: $sen(\theta) = \dfrac{3}{5}$

$\cos(\theta) = \dfrac{x}{h}$ Entones: $\cos(\theta) = \dfrac{4}{5}$

$\tan(\theta) = \dfrac{y}{x}$ Entones: $\tan(\theta) = \dfrac{3}{4}$

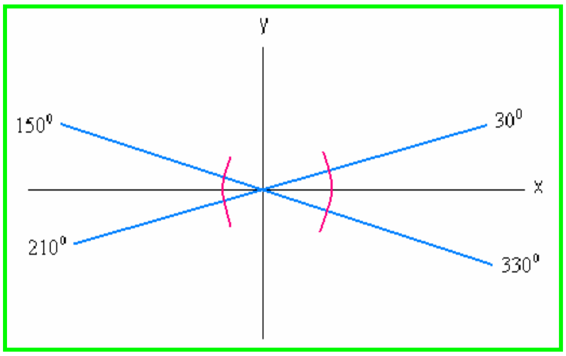
$\cot(\theta) = \dfrac{x}{y}$ Entones: $\cot(\theta) = \dfrac{4}{3}$

$\sec(\theta) = \dfrac{h}{x}$ Entones: $\sec(\theta) = \dfrac{5}{4}$

$\csc(\theta) = \dfrac{h}{y}$ Entones: $\csc(\theta) = \dfrac{5}{3}$

Se observa que cada relación tiene para un ángulo, un valor real.

Reducción de Ángulos al Primer Cuadrante: Se sabe que los ángulos el primer cuadrante van de 0 a π/2, cualquier ángulo mayor a estos se puede reducir a un ángulo equivalente del primer cuadrante. Lo anterior se sustenta en que las medidas de los ángulos se hacen respecto al eje *x*, luego en el plano cartesiano y para la circunferencia unidad (radio = 1) siempre habrá 4 ángulos equivalentes respecto al eje *x*, solo que cada uno estará ubicado en cada uno de los cuadrantes. Con la siguiente situación se puede ilustrar la reducción mencionada.



Se observa que los 4 ángulos tienen la misma abertura respecto al eje *x*, solo que están en cuadrantes diferentes. Para expresar la abertura en el primer cuadrante, se debe hacer una conversión.

Del segundo cuadrante: 180^0 - 150^0
Del tercer cuadrante. $210^0 - 180^0$
Del cuarto cuadrante: $360^0 - 330^0$

Generalizando: Sea Φ un ángulo dado y sea x^0 el ángulo equivalente de Φ llevado al primer cuadrante, para cualquier ángulo Φ > π/2 se tiene:

Del segundo al primer cuadrante: $\boxed{x^0 = 180^0 - \theta}$

Del tercer al primer cuadrante: $\boxed{x^0 = \theta - 180^0}$

Del cuarto al primer cuadrante: $\boxed{x^0 = 360^0 - \theta}$

Ejemplo 1:

Reducir la primer cuadrante: 125^0 y 225^0

Solución:

El ángulo de 125^0 esta en el segundo cuadrante, luego: $x^0 = 180^0 - 125^0 = 55^0$
Esto significa que el ángulos de 125^0 que esta en el segundo cuadrante, es equivalente a 55^0 en el primer cuadrante.

Para el ángulo 225^0 que esta en le tercer cuadrante: $225^0 - 180^0 = 45^0$
Para este caso el resultado nos indica que 225^0 ubicado en el tercer cuadrante es equivalente a 45^0 en el primer cuadrante.

Ejemplo 2:

Reducir al primer cuadrante los ángulos 310^0 y -60^0

Solución:

Para 310^0 por estar en el cuarto cuadrante: $x^0 = 360^0 - 310^0 = 50^0$

Para el caso de -60^0, el valor en el primer cuadrante es 60^0 (porqué).

Funciones Trigonométricas de Ángulos:

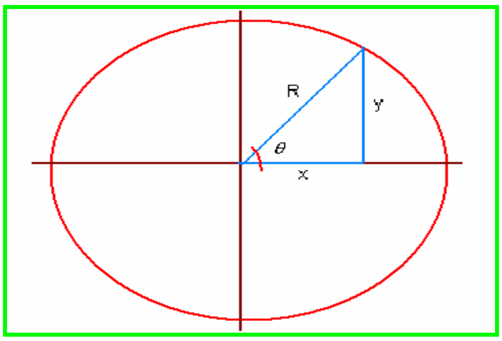
Las funciones trigonométricas son relaciones en las cuales a cada ángulo le corresponde un único número real. El dominio de las funciones trigonométricas son todas las medidas de los ángulos agudos, pero según la función definida, el dominio se puede extender a otros ángulos.

Se va a analizar cada función, con el fin de identificar sus particularidades, no sin antes resaltar que estas funciones son periódicas, ya que se repiten cada cierto ángulo, es decir:

$f(x) = f(x+p)$ Para $P > 0$.

Valores de la Función trigonométrica: Por ser las funciones trigonométricas de tipo trascendental, la obtención de las parejas ordenadas para hacer la gráfica es muy particular. El camino es recurrir a la circunferencia unidad, la cual tiene como radio uno. Por otro lado, hay un teorema que permite identificar los valores de los lados en un triángulo rectángulo

CIRCUNFERENCIA UNIDAD (R=1)



ANGULO DE 0 – 90: (0, π)

Para el ángulo de 0^0 los valores de las coordenadas son:

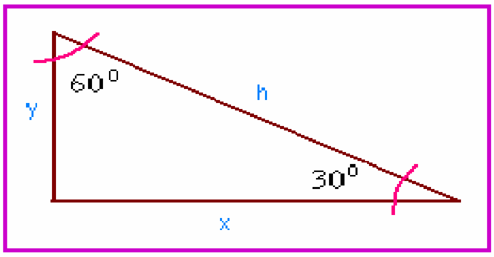
$y = 0$ y $x = 1$.

Para el caso de 90^0 la situación es la siguiente:

$y = 1$ y $x = 0$

ANGULO DE 30 – 60:(π/6, π/3)

TEOREMA:
En un triángulo rectángulo 30^0 - 60^0, la longitud del lado opuesto al ángulo de 30^0 es la mitad de la longitud de la hipotenusa.



Entonces: $y = \frac{h}{2}$ y $x = \sqrt{h^2 - y^2}$

Demostración:

la demostración se deja como ejercicio para que usted estimado estudiante, la investigue, así se afianzan de manera más dinámica los conocimientos.

Para el caso de la circunferencia unidad:

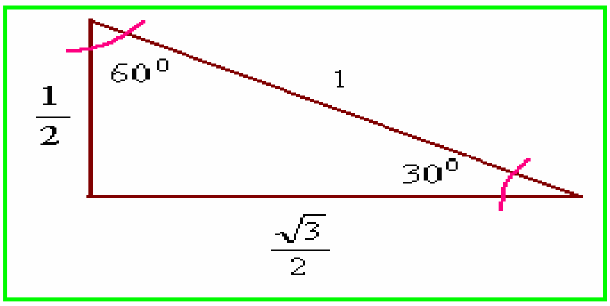
$h = 1$

$y = \frac{h}{2} = \frac{1}{2}$

$$x = \sqrt{h^2 - y^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

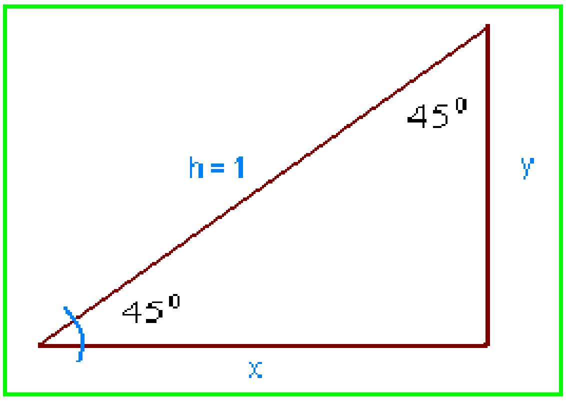
Entonces el triángulo tendrá las siguientes longitudes:

Con este resultado, se puede hallar los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos de 30^0 y 60^0.



ANGULO DE 45: ($\pi/4$)

Por geometría básica sabemos que un triángulo rectángulo con un ángulo de 45^0, tiene sus lados iguales, ya que el otro ángulo también es de 45^0



Como x = y, entonces por Pitágoras:

$h = \sqrt{x^2 + y^2}$ Reemplazando:

$1 = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}x$

Despejando la incógnita:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por consiguiente: $x = y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Conociendo las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo para los ángulos notables en el primer cuadrante, podemos iniciar el estudio de las funciones trigonométricas.

FUNCIÓN SENO:

Definida la relación sen (θ), podemos definir la función seno como sigue:

> f (x) = sen(θ)
>
> Donde x = θ y al cual le corresponde un número real.

Lo anterior significa que a cada ángulo le corresponde un número real.

Dominio: Son todos los reales, ya que la variable puede tomar cualquier valor real.
Imagen: la imagen de la función seno esta en el intervalo [-1, 1], ya que el cociente de la relación nunca puede superar la unidad. Lo anterior establece que como sen (θ) = y / h siendo h $\geq$ y, lo máximo es que h = y, así el cociente será 1, pero si h > y, el cociente estará entre 0 y 1, siendo 0 cuando y = 0. El signo negativo se da en los cuadrantes donde el eje *y* es negativo.

Valores de la Función: Para obtener los valores de los ángulos notables, utilizamos la definición de relación trigonométrica y las longitudes del triángulo para los diferentes ángulos analizados.

$sen(\theta) = \dfrac{y}{h} \Rightarrow\Rightarrow sen(0^0) = \dfrac{0}{1} = 0$ Luego: sen (0^0) = 0

$$sen(30^0) = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2} \qquad sen(45^0) = \frac{\sqrt{2}/2}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

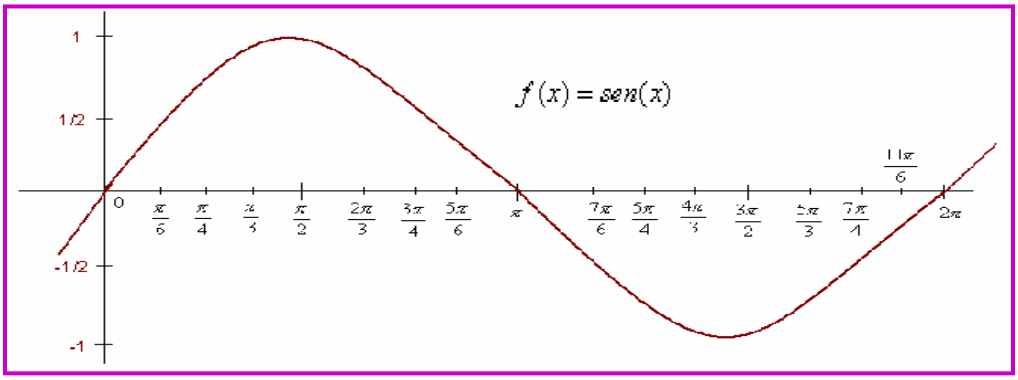
$$sen(60^0) = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad sen(90^0) = \frac{1}{1} = 1$$

Para obtener los valores de los ángulos en los demás cuadrantes, se tiene en cuenta la equivalencia entre ángulos del primer cuadrante y los otros. Por ejemplo el ángulo de 30^0 es equivalente a 150^0, 210^0 y 330^0, solo se tiene en cuenta el valor de y para cado uno. El eje y es positivo en el primero y segundo cuadrante (I y II) y negativo en los demás. Como consecuencia se tiene que para la función sen (β), el valor de los ángulos en el primero y segundo cuadrante son positivos y en el tercero y cuarto (III y IV) son negativos.

El siguiente cuadro resume los valores notables del dominio y su imagen.

0^0 30^0 45^0 60^0 90^0	120^0 135^0 150^0 180^0	210^0 225^0 240^0 270^0	300^0 315^0 330^0 360^0
$0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0$	$-\frac{1}{2} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad -1$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 0$

La gráfica:



Simetría: Para la función seno se cumple: **sen(-x) = -sen(x),** luego es una función impar, por consiguiente es simétrica respecto al origen de coordenadas cartesianas.
Monotonía: La función no es monótona, ya que presenta crecimiento y decrecimiento a través de su dominio, como se puede observar en la gráfica.
Periodicidad: Anteriormente hicimos referencia a que la función es periódica, el periodo del seno es 2π, ya que cumple: $sen(x) = sen(x + 2\pi)$. Esto significa que la función seno se repite cada 2π en las mismas condiciones.

Propiedades Adicionales:

Por las características de la función seno, es pertinente hacer referencia al as siguientes propiedades:

Para x cualquier ángulo de la circunferencia unidad.

-) $sen(x+\pi) = -sen(x)$

-) $sen(x-\pi) = sen(x)$

-) $sen(\pi/2 - x) = \cos(x)$

FUNCIÓN COSENO:

> f (x) = cos(θ)
>
> Donde x = θ y al cual le corresponde un número real.

Al igual que en el seno, a cada ángulo le corresponde un número real.

Dominio: Son todos los reales, ya que la variable puede tomar cualquier valor real. $(-\infty, \infty)$

Imagen: la imagen de la función coseno esta dada también en el intervalo [-1, 1], ya que el cociente de la relación nunca puede superar la unidad.
Como se explico para seno, en este caso es lo mismo. *Como cos (θ) = x / h siendo h ≥ x, lo máximo es que h = x, así el cociente será 1, pero si h > x, el cociente estará entre 0 y 1, siendo 0 cuando x = 0. El signo negativo se da en los cuadrantes donde el eje x es negativo.*

Valores de la Función: Para obtener los valores de los ángulos notables, utilizamos la definición de relación trigonométrica y las longitudes del triángulo para los diferentes ángulos analizados.

$\cos(\theta) = \frac{x}{h} \Rightarrow\Rightarrow \cos(0^0) = \frac{1}{1} = 1$ Luego: cos (0^0) = 1

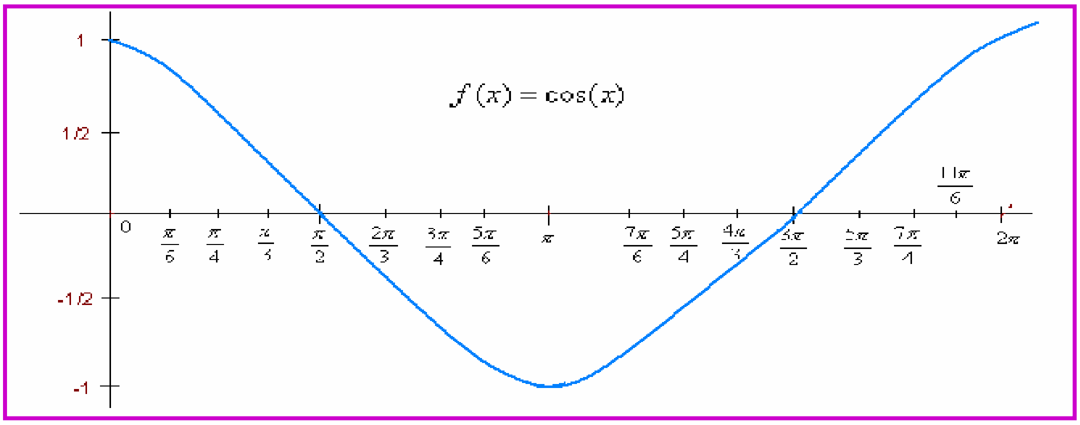
$\cos(30^0) = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos(45^0) = \frac{\sqrt{2}/2}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos(60^0) = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$	$\cos(90^0) = \frac{0}{1} = 0$

Para obtener los valores de los ángulos en los demás cuadrantes, al igual que el seno, se tiene en cuenta la equivalencia entre ángulos del primer cuadrante y los otros cuadrantes. Por ejemplo el ángulo de 30^0 es equivalente a 150^0, 210^0 y 330^0, solo se tiene en cuenta el valor de x para cado uno. El eje x es positivo en el primero y cuarto cuadrante (I y IV) y negativo en los demás. Como consecuencia se tiene que para la función cos (Φ), el valor de los ángulos en el primero y cuarto cuadrante son positivos y en el segundo y tercero (II y III) son negativos.

El siguiente cuadro resume los valores notables del dominio y su imagen.

0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

La gráfica:



Simetría: Para la función coseno se cumple: **cos(-x) = cos(x),** luego es una función par, por consiguiente es simétrica respecto al eje *y* de coordenadas cartesianas.
Monotonía: La función no es monótona, ya que presenta crecimiento y decrecimiento a través de su dominio, como se puede observar en la gráfica.
Periodicidad: El periodo del coseno es 2π, ya que cumple: $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$ Esto significa que esta función; al igual que el seno, se repite cada 2π en las mismas condiciones.

Propiedades Adicionales:

Por las características de la función seno, es pertinente hacer referencia al as siguientes propiedades:

Para *x* cualquier ángulo de la circunferencia unidad.

-) $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$

-) $\cos(x - \pi) = -\cos(x)$

-) $\cos(\pi/2 - x) = sen(x)$

FUNCIÓN TANGENTE:

f (x) = tan(θ)

La tangente significa que toca en un punto.

Dominio: Son los reales para los cuales x ≠ 0, así el dominio serán todos los valores excepto los múltiplos de π/2, esto debido a que en este ángulo el valor de x es 0, luego el cociente y / x queda indefinido.
Imagen: la imagen de la función tangente son todos los reales.

Valores de la Función: Con los mismos argumentos utilizados para seno y coseno, se puede obtener los valores de los ángulos notables.

$\tan(\theta) = \dfrac{y}{x} \Rightarrow\Rightarrow \tan(0^0) = \dfrac{0}{1} = 0$ Luego: cos (0^0) = 0

$\tan(30^0) = \dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan(45^0) = \dfrac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$
$\tan(60^0) = \dfrac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$	$\tan(90^0) = \dfrac{1}{0} = ind$

La función tangente es positiva donde el producto de las variables x e y es positivo; es decir, la tangente es positiva en los cuadrantes primero y tercero. (I y III)

0^0 30^0 45^0 60^0 90^0	120^0 135^0 150^0 180^0	210^0 225^0 240^0 270^0	300^0 315^0 330^0 360^0
0 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 1 $\sqrt{3}$ ∞	$-\sqrt{3}$ -1 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 1 $\sqrt{3}$ ∞	$-\sqrt{3}$ -1 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 0

La Grafica:

La función tangente tiene Asíntotas verticales en x = π/2 y 3π/2, para la circunferencia unidad, se puede observar en la siguiente gráfica.

Simetría: Para la función tangente se cumple: **tan(-x) = - tan(x),** luego es una función impar, por consiguiente es simétrica respecto al origen de coordenadas.
Monotonía: La función tangente es monótona, ya que es creciente en su dominio.
Periodicidad: El periodo de la tangente es π, ya que cumple: $\tan(x) = \tan(x + \pi)$ Esto significa que esta función se repite cada π en las mismas condiciones.

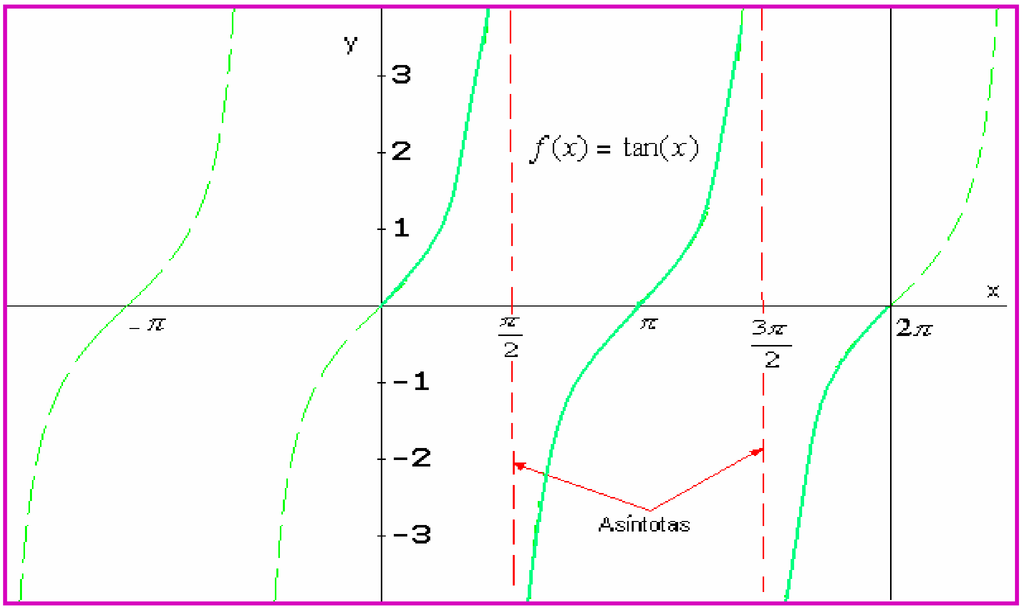
Propiedades Adicionales:

Para x cualquier ángulo de la circunferencia unidad.

-) $\tan(\dfrac{\pi}{2} - x) = \cot(x)$

-) $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$

-) $\tan(\pi + x) = \tan(x)$



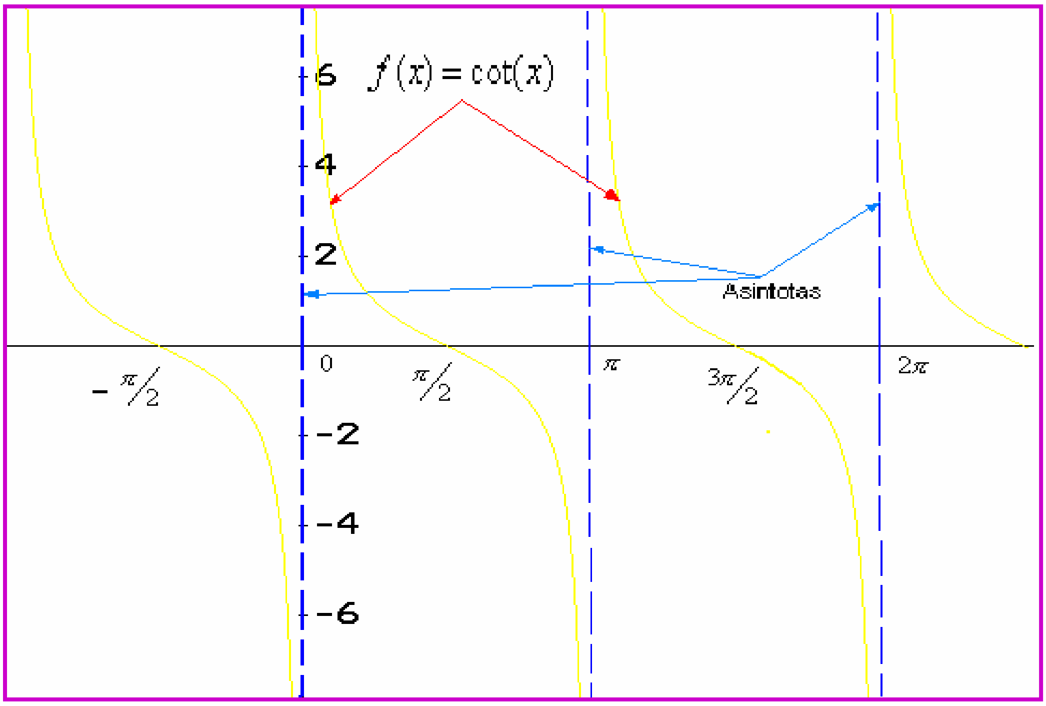
FUNCIONES COMPLEMENTARIA:

De esta manera quedan analizadas las funciones trigonométricas principales, en seguida se hará una descripción de las funciones complementarias, con el fin de que usted estimado estudiante indague en diferentes fuentes sobre las mismas, para de esta manera afianzar sus conocimientos.

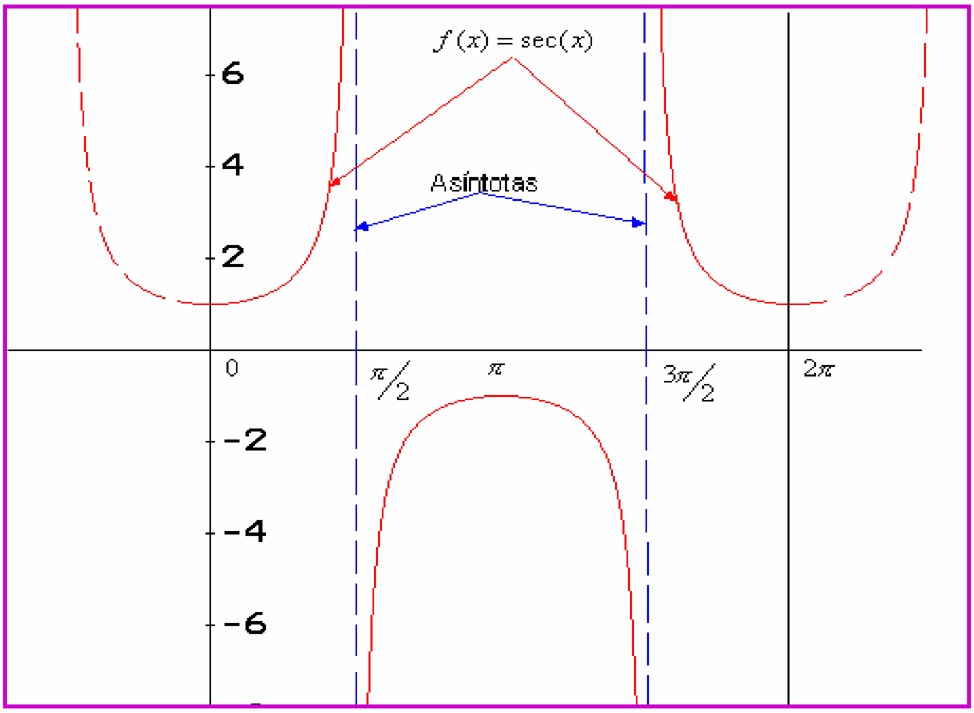
FUNCIÓN	DOMINIO	IMAGEN	SIMETRÍA	MONOTONIA	PERIODO	ASÍNTOTAS
Cotangente	x є R, donde $x \neq \pi$ y $x \neq 2\pi$	Los Reales	Función impar. Simetría respecto al origen	Es monótona. Decreciente en su dominio	π	x = 0 x = π x = 2 π
Secante	x є R, donde $x \neq \pi/2$ y $x \neq 3\pi/2$	(-α, -1] U [1, α]	Función par. Simetría respecto al eje y.	No es monótona, ya que crece y decrece en su dominio.	2π	x = π/2 x = 3π/2
Cosecante	x є R, donde $x \neq \pi$ y $x \neq 2\pi$	(-α, -1] U [1, α]	Función impar. Simetría respecto al origen	No es monótona, ya que crece y decrece en su dominio.	2π	x = 0 x = π x = 2 π

Graficas:

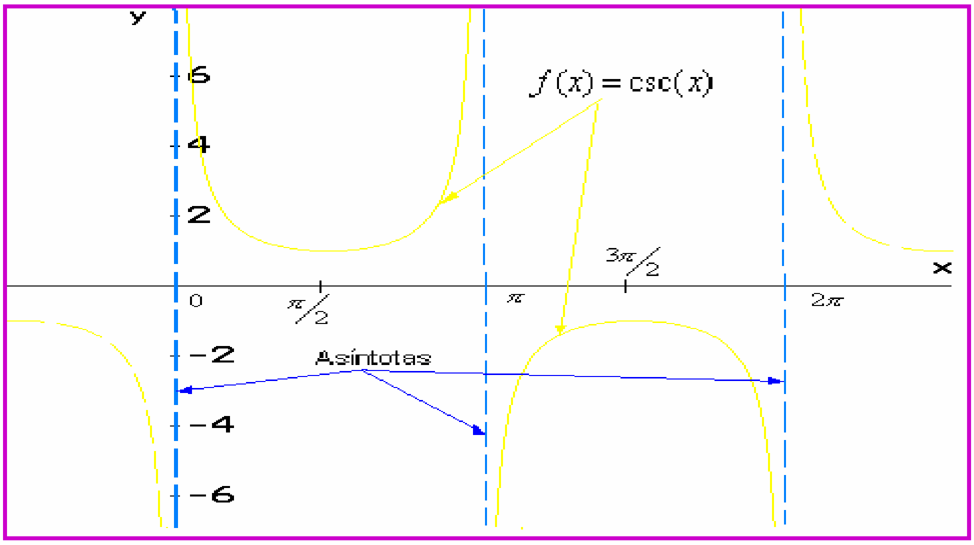
Función Cotangente:



Función Secante:



Función Cosecante:



Los valores de las funciones cotangente, secante y cosecante, se obtiene de la misma manera como se hizo para las funciones principales.

Veamos algunos ejemplos.

$$\cot(\frac{\pi}{6}) = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

$$\sec(\frac{\pi}{6}) = \frac{h}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc(\frac{\pi}{6}) = \frac{h}{y} = \frac{1}{1/2} = 2$$

Así sucesivamente.

El trabajo consiste en que usted estimado estudiante complete los valores para los ángulos notables en los cuatro cuadrantes en la tabla propuesta en seguida, utilizando los principios dados en el aparte: *Valores de la funciones trigonométricas:*

Cotangente:

0^0 30^0 45^0 60^0 90^0	120^0 135^0 150^0 180^0	210^0 225^0 240^0 270^0	300^0 315^0 330^0 360^0
∞ $\sqrt{3}$			

Secante:

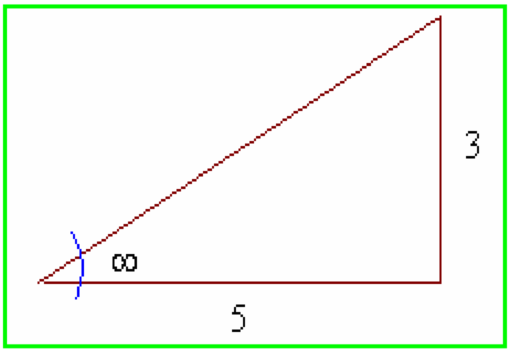
0^0 30^0 45^0 60^0 90^0	120^0 135^0 150^0 180^0	210^0 225^0 240^0 270^0	300^0 315^0 330^0 360^0
1 $2\sqrt{3}/3$			

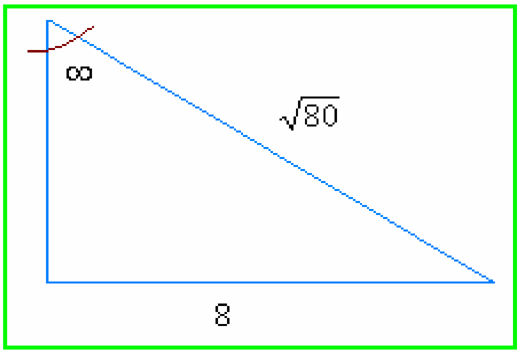
Cosecante:

0^0 30^0 45^0 60^0 90^0	120^0 135^0 150^0 180^0	210^0 225^0 240^0 270^0	300^0 315^0 330^0 360^0
∞ 2			

EJERCICIOS

1. Para Los triángulos dados, hallar el valor de las 6 funciones trigonométricas, según el ángulo establecido.





2. Para las funciones definidas, hallar las restantes y hacer la gráfica explicativa.

a-) $sen(\infty)=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ b-) $\tan(\infty)=\dfrac{7}{5}$

3. Para la función f(x) = cot(x), en el intervalo $0 \le x \le 2\pi$, identificar las asíntotas horizontales y verticales, si las tiene.

4. Graficar las siguientes funciones:

a-) f(x) = - cot(x)

b-) g(x) = - cos(x)

c-) h(x) = sen(3x)

5. Hallar el valor de las expresiones propuestas:

a-) $sen(\left(\pi/2\right)+\cos\left(\pi/6\right)$

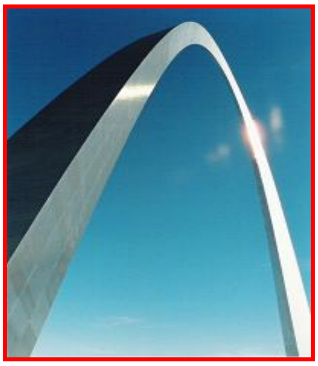
b-) $\tan(\left(\pi/4\right)+\cot\left(\pi/3\right)-sen(0)$

c-) $\sec(\left(\pi/6\right)+\csc\left(\pi/3\right)+\cot\left(\pi/4\right)$

d-) $3\cos(\left(5\pi/6\right)-4\tan\left(7\pi/6\right)+3\sec\left(11\pi/6\right)$

Funciones Hiperbólicas:

Dentro de las funciones trascendentales existen unas funciones que se obtienen a partir de la combinación de las funciones exponenciales y son llamadas funciones hiperbólicas y cuyo nombre esta relacionado con la hipérbola, al igual que el triángulo con las trigonométricas.



Fuente: wikipedia.

La importancia de estas funciones esta en que existen algunas estructuras arquitectónicas que presentan una curvatura que no es precisamente una parábola, como es el caso del arco Gateway en E.E. U.U. También son muy usadas como herramienta para resolver ecuaciones diferenciales.

Otro campo de acción de este tipo de función es cuando se suspende un cable homogéneo flexible entre dos puntos a la misma altura, se forma una curva denominada *Catenaria*, dicha curva es modelada por una función hiperbólica.

SENO HIPERBÓLICO:

La función seno hiperbólico denotado por f(x) = senh(x), se define de la siguiente manera:

$$\boxed{senh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}}$$

Dominio: Todos los reales, ya que la variable *x* puede tomar cualquier valor real.

Imagen: la imagen de la función seno hiperbólico son también todos los reales.

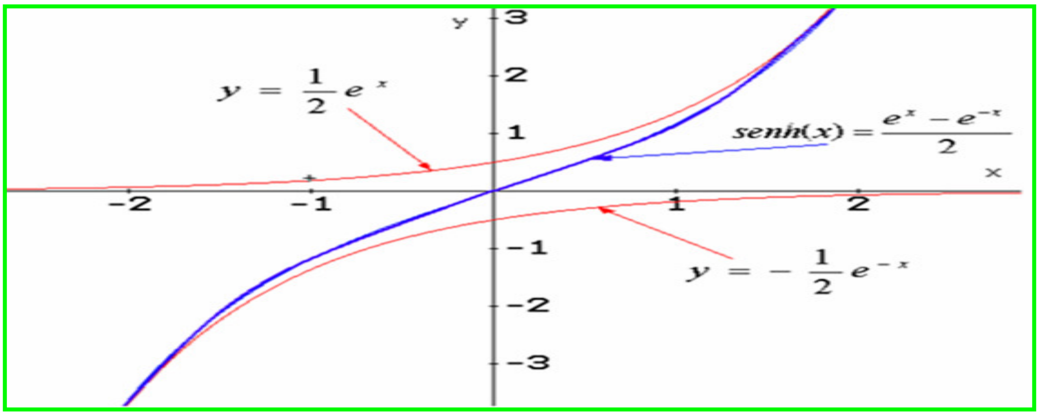
Simetría: Para la función seno hiperbólico se cumple: **senh(-x) = -senh(x),** luego es una función impar, por consiguiente es simétrica respecto al origen de coordenadas cartesianas.

Monotonía: La función es monótona, ya que creciente en su dominio, como se puede observar en la gráfica.

La gráfica: Para graficar esta función se utiliza dos referencias, consistente en dos funciones exponenciales, al saber:

$$y = \frac{1}{2}e^{x} \quad \text{y} \quad y = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

Esto debido a que la función senh(x) es una combinación de estas.



COSENO HIPERBÓLICO:

La función coseno hiperbólico denotado por f(x) = cosh(x), se define de la siguiente manera:

$$\boxed{\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}}$$

Dominio: Todos los reales, ya que la variable *x* puede tomar cualquier valor real.

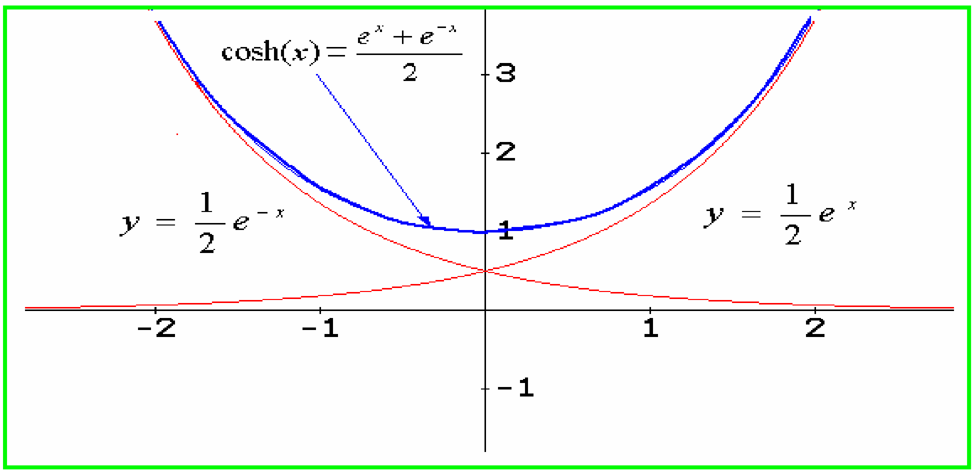
Imagen: la imagen de la función coseno hiperbólico son todos los reales mayores e iguales a uno. ($y \geq 1$)

Simetría: Para la función coseno hiperbólico se cumple: **cosh(-x) = cosh(x),** luego es una función par, por consiguiente es simétrica respecto al eje *y*.

Monotonía: La función no es monótona, ya que creciente y decrece en su dominio, la gráfica permite observar esta situación.

La gráfica: Para graficar esta función se utiliza como referencia las siguientes funciones. $y = \frac{1}{2}e^{x}$ y $y = \frac{1}{2}e^{-x}$

Esto debido a que la función cosh(x) es una combinación de estas.



TANGENTE HIPERBÓLICO:

La función tangente hiperbólica denotada por f (x) = tanh(x), se define de la siguiente manera:

$$\boxed{\tanh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}}$$

Dominio: Todos los reales, ya que la variable *x* puede tomar cualquier valor real.

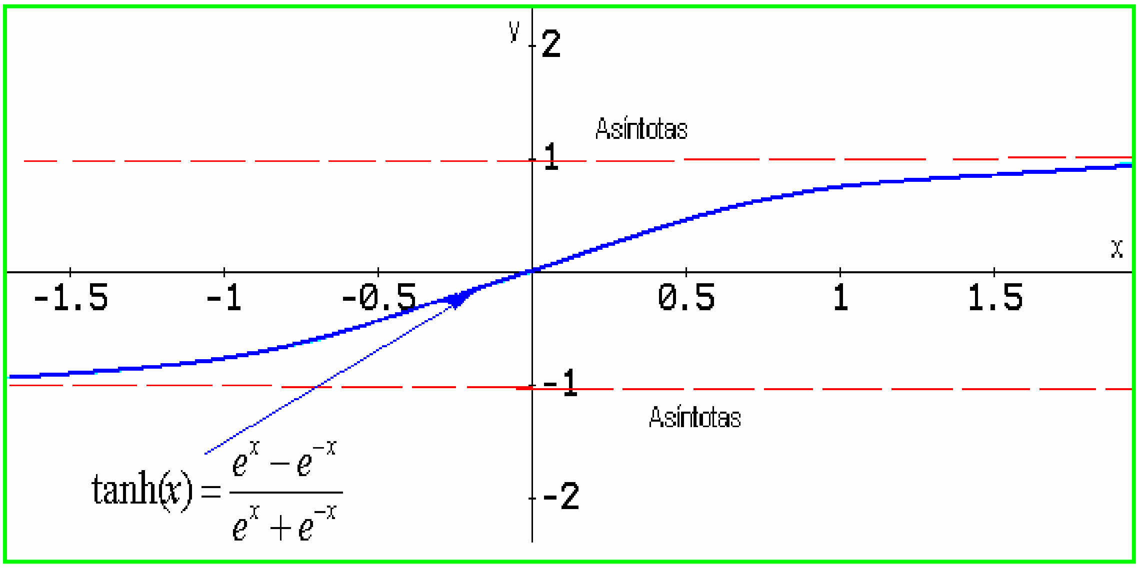
Imagen: la imagen de la función tangente hiperbólico son todos los reales comprendidos en el intervalo (-1,1).

Simetría: La función tangente hiperbólica es una función par, por consiguiente es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Monotonía: La función tanh(x) es monótona, ya que es creciente en su dominio.

Asíntotas: Esta función tiene dos asíntotas horizontales, en *y = 1* y *y = -1*

La gráfica: Para graficar esta función se utiliza como referencia las funciones combinadas de seno y coseno hiperbólicos.



COTANGENTE HIPERBÓLICO:

La función cotangente hiperbólica denotada por f (x) = coth(x), se define de la siguiente manera:

$$\boxed{\coth(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}}$$

Dominio: Todos los reales, diferente de cero; es decir, $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

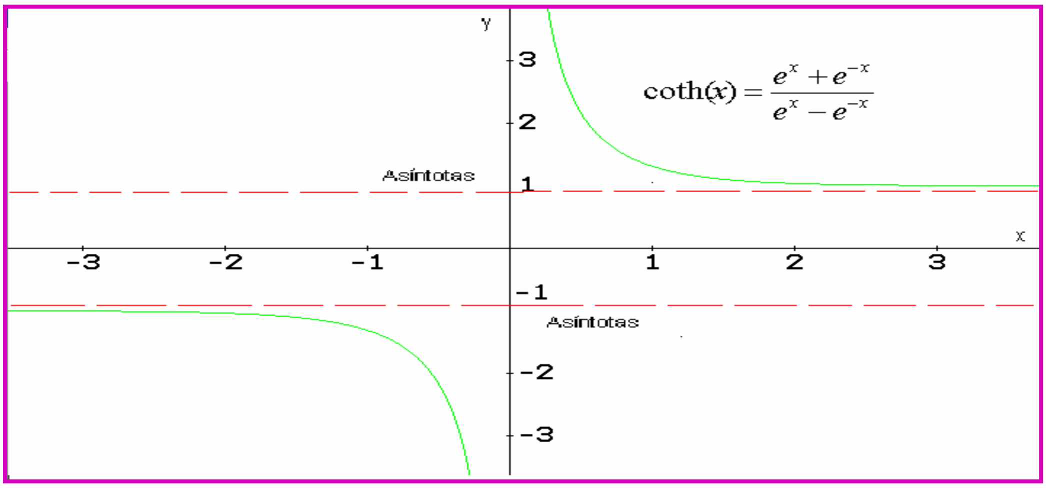
Imagen: la imagen de la función cotangente hiperbólico son los reales comprendidos en los intervalos $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

Simetría: La función cotangente hiperbólica es una función impar, ya que cumple la condición **coth(-x) = -coth(x),** por consiguiente es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Monotonía: La función coth(x) es monótona, ya que es decreciente en su dominio.

Asíntotas: Esta función tiene dos asíntotas horizontales, en *y = 1* y *y = -1*. Además una asíntota vertical en x = 0.

La gráfica: Para graficar esta función se utiliza como referencia las funciones combinadas de coseno y seno hiperbólicos.

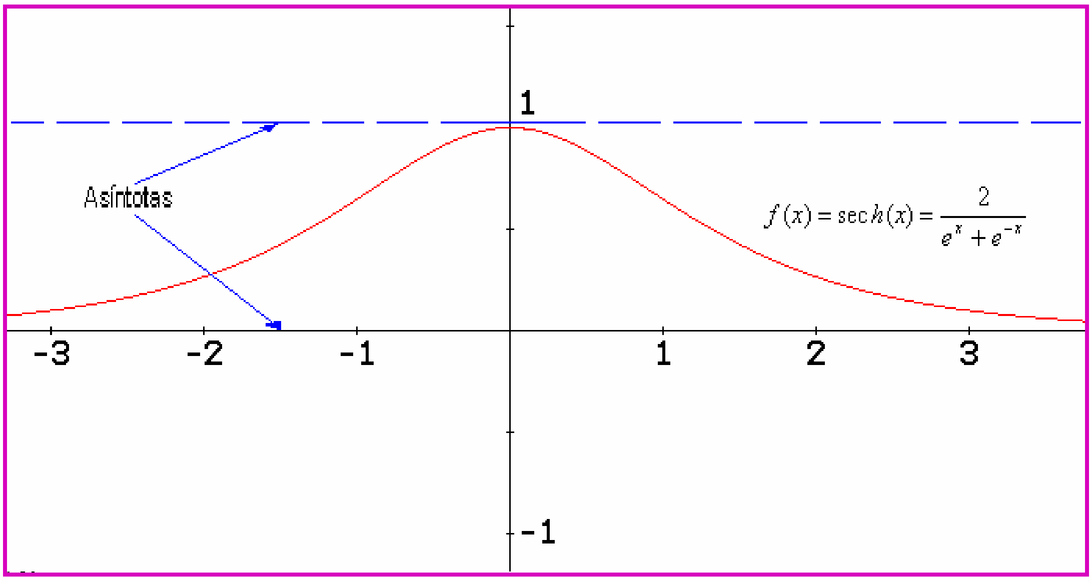


Para las funciones secante y cosecante hiperbólicas, se hace un resumen en el siguiente cuadro.

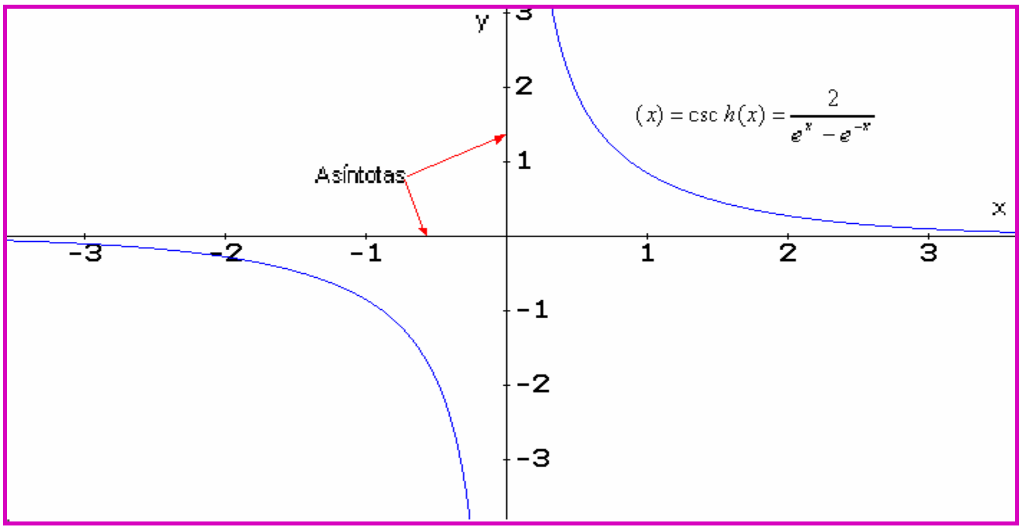
FUNCIÓN	DOMINIO	IMAGEN	SIMETRIA	MONOTONÍA	ASÍNTOTAS
Sech(x)	Los Reales	Intervalo (0, 1]	Respecto al eje y.	No es monótona	y = 1 y = 0
Csch(x)	(-α,0) U (0, α)	(-α,0) U (0, α)	Respecto al origen	Monótona. Es decreciente en su dominio	x = 0 y = 0

Gráficas:

Función secante hiperbólica:



Función cosecante hiperbólica:



EJERCICIOS

1. Hallar el valor de f(x = a) para las funciones dadas.

   a-) $f(x) = senh(x)$ Para x = 0 y x = 1. Rta: $o \quad y \quad \dfrac{e^2 - 1}{2}$

   b-) $g(x) = \tanh(x)$ Para x = 2 y x = 4. Rta: $\dfrac{e^4 - 1}{e^4 + 1} \quad y \quad \dfrac{e^8 - 1}{e^8 + 1}$

2. Dada la función f(x) = 4cosh(x). Cual será el valor de la función para:

   a-) x = 0 Rta: 4

   b-) x = 2 Rta: $2e^4 + \dfrac{2}{e^2}$

3. Verificar que:

   a-) cosh(x) + senh(x) = e^x

   b-) cosh(2x) + senh(2x) = e^{2x}

4. Dadas las funciones f(x) = 3coth(x) y g(x) = 4sech(x). Cual será el valor para:

   a-) x = 1. Rta: $\dfrac{3e^2 + 3}{e^2 - 1} + \dfrac{8e}{e^2 + 1}$

   b-) x = 5 Rta: $\dfrac{3e^{10} + 3}{e^{10} - 1} + \dfrac{8e^5}{e^{10} + 1}$

5. En un cuadro hacer un paralelo de las funciones hiperbólicas, identificando similitudes y diferencias.

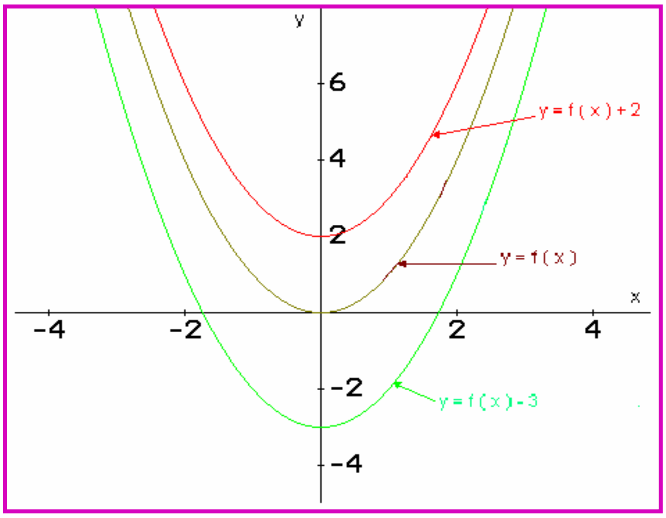
TRANSFORMACIÓN DE FUNCIONES

$$y = af(bx + c)$$

Las funciones analizadas hasta el momento son las que se podrían consideran las funciones modelos o básicas, pero a partir de estas se pueden obtener nuevas funciones modificando o mejor haciendo ciertas transformaciones a las primeras. Las transformaciones pueden se de tipo traslación o estiramiento.

TRASLACIÓN: La traslación es un corrimiento que puede sufrir la función ya sea horizontal o verticalmente, debido a que se adiciona una constante a dicha función.

Corrimiento Vertical: Sea $y = f(x)$ una función, si se adiciona una constante k, de tal manera que la función queda: $y = f(x) + k$, la función sufre un corrimiento vertical.



Cuando:

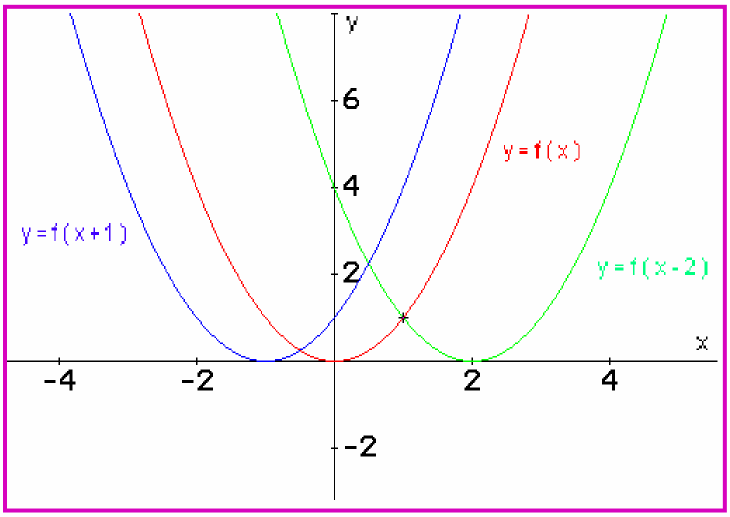
K > 0

El corrimiento vertical es hacia arriba k unidades a partir de la función base.

K < 0

El corrimiento vertical es hacia abajo k unidades a partir de la función base.

Corrimiento Horizontal: Sea $y = f(x)$ una función, si se adiciona una constante p, de tal manera que la función queda: $y = f(x) + p$, la función sufre un corrimiento horizontal.



Cuando:

p > 0

El corrimiento horizontal es hacia la izquierda p unidades a partir de la función base.

p < 0

El corrimiento horizontal es hacia la derecha p unidades a partir de la función base.

Ejemplo 1:

Sea la función $y = x^3$ A partir de esta obtener:

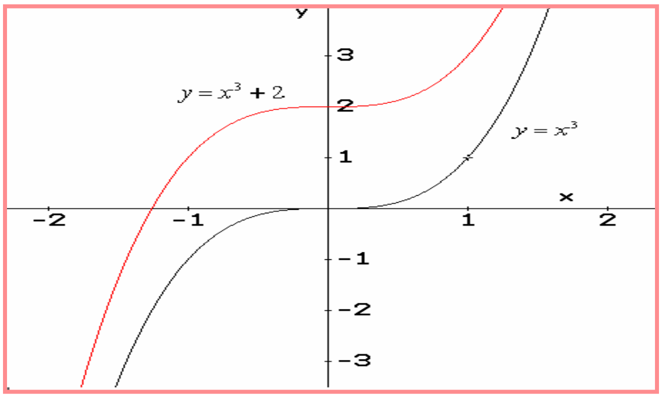
a-) $y = x^3 + 2$

b-) $y = (x-2)^3$

c-) $y = (x+1)^3 - 2$

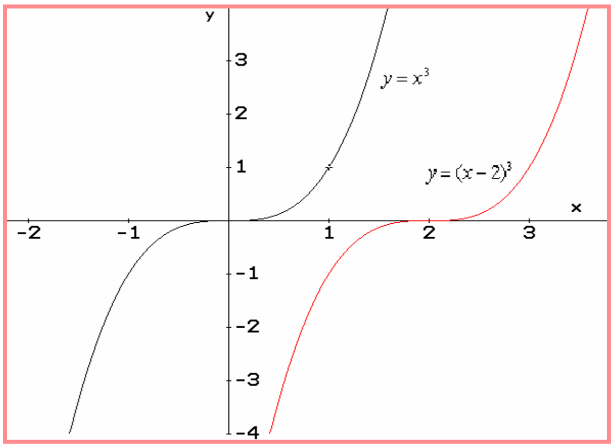
Solución:

a-)



De la función base $y = x^3$, se le adiciono + 2,
A la función, luego hubo un corrimiento vertical 2 unidades hacia arriba.

b-)



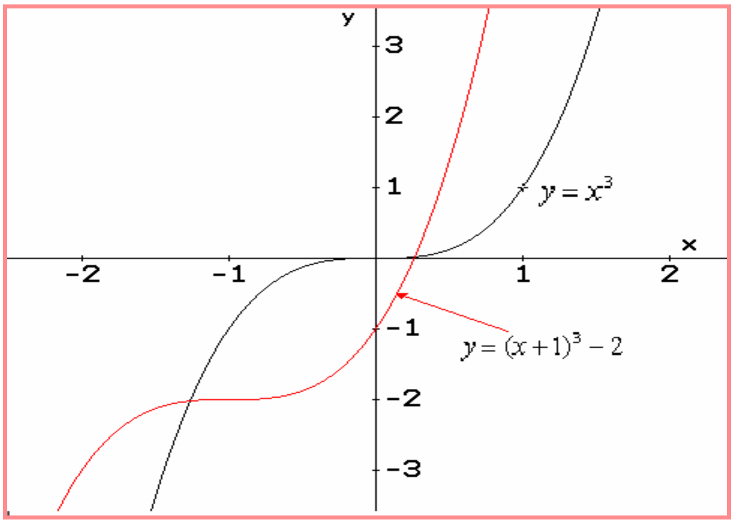
Para este caso se adicionó – 2 a la variable, luego el corrimiento es horizontal, dos unidades hacia la derecha.

c-)

Para este caso se presenta corrimiento en los dos ejes.

Horizontal: Un unidad hacia la izquierda, ya que se adicionó + 1 a la variable.

Vertical: Dos unidades hacia abajo, ya que se adicionó – 2 a la función.



Ejemplo 2:

Graficar la función:

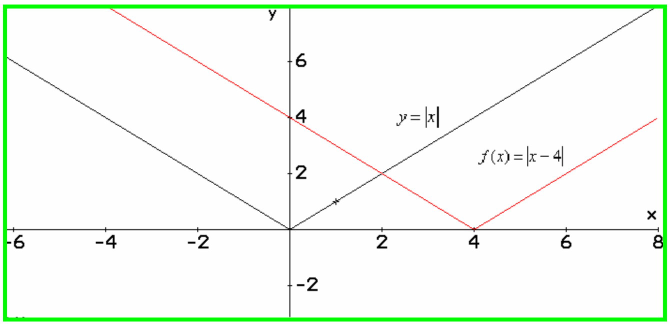
a-) $f(x) = |x-4|$

b-) $g(x) = |x| + 2$

c-) $h(x) = |x-2| + 3$

Solución:

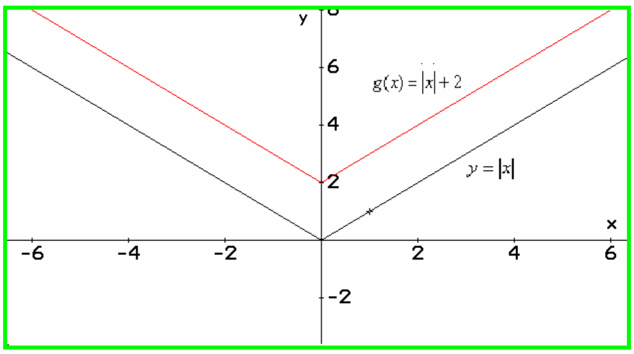
a-)



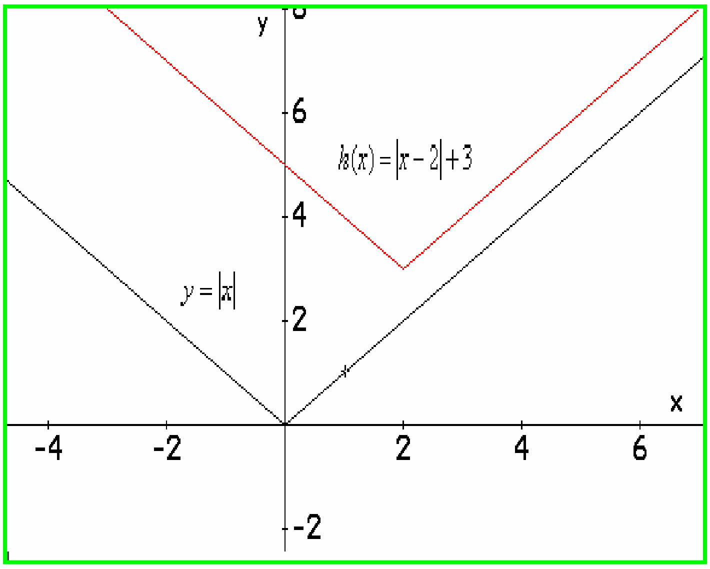
La función base es la función valor absoluto, luego para el primer caso se adiciona 4 unidades negativas a la variable, así hay corrimiento horizontal de 4 unidades hacia la derecha.

b-)

A partir de la función base, valor absoluto, se adiciona dos unidades positivas a la función, luego esta se corre dos unidades hacia arriba; es decir, sufre corrimiento vertical.



c-)



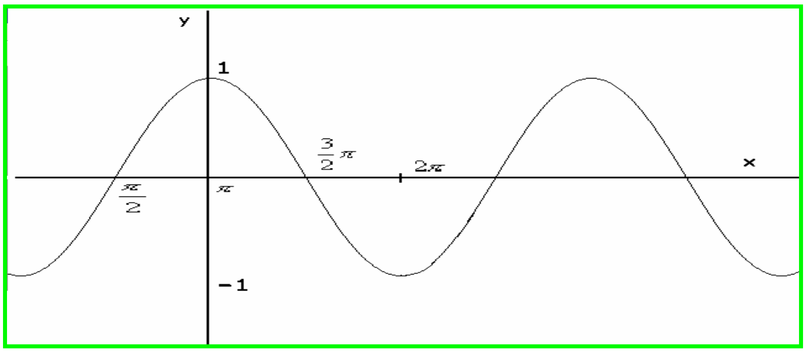
para este caso, la función sufre corrimiento tanto vertical como horizontal.

Vertical: Como se adiciono 3 unidades positivas a la función, entonces ésta sube 3 unidades.

Horizontal: Además para la misma función se adicionó dos unidades negativas a la variable, entonces ésta se corre dos unidades hacia la derecha.

Ejemplo 3:

Según la grafica siguiente, identificar al función que la describe.



Solución:

a-) $f(x) = \cos(x - \pi)$

b-) $g(x) = \cos(x + \pi)$

c-) $h(x) = sen(x - \pi)$

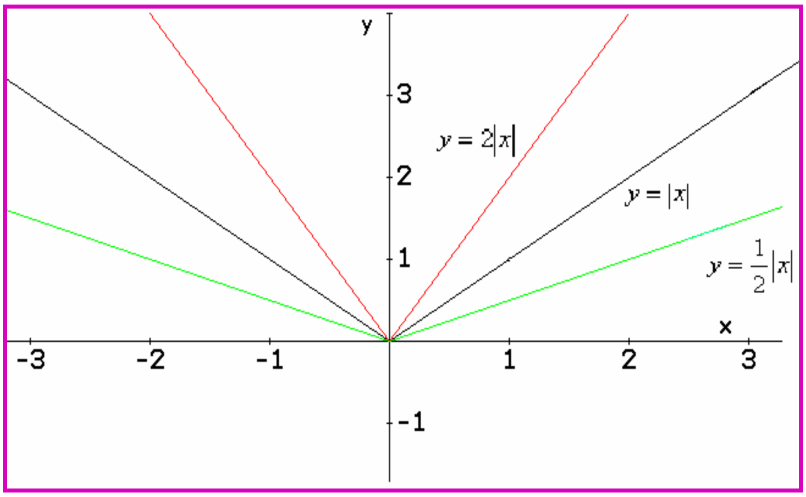
Aunque la respuesta esta entre estas, por favor justifiquen ¿Cual es y porque?

ESTIRAMIENTO: Cuando a una función se le antepone un coeficiente, ésta puede presentar estiramiento o compresión, según los siguientes casos:

DEFINICIÓN:
Sea f (x) una función y sea k una constante diferente de cero.

Si $y = kf(x)$ La función sufre compresión vertical en k unidades.

Si $y = \frac{1}{k} f(x)$ La función sufre estiramiento vertical en 1/k unidades



La función base es la función valor absoluto.

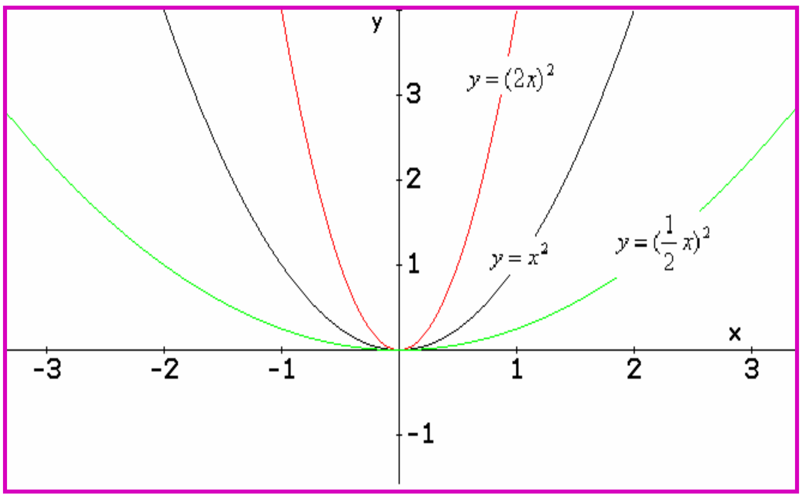
Se multiplica la función por el valor 2, así la función sufre compresión vertical.

Cuando se multiplico la función por ½, ésta se estiró verticalmente.

DEFINICIÓN:
Sea f (x) una función y sea k una constante diferente de cero.

Si $y = f(kx)$ La función sufre compresión horizontal en k unidades.

Si $y = f(\frac{1}{k}x)$ La función sufre estiramiento horizontal en 1/k unidades



La función base es la función cuadrática.

Se multiplica la variable por el valor 2, así la función sufre compresión vertical.

Cuando se multiplico la variable por ½, la función sufre estiramiento verticalmente.

Ejemplo 1:

Dada la función: $f(x) = x^3$. Establecer que ocurre si:

a-) Se multiplica a f(x) por 3

b-) Se multiplica a f(x) por 1/3

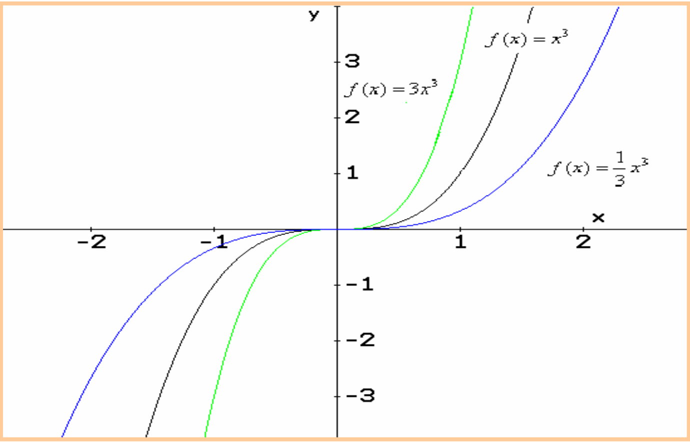
c-) Se multiplica a x por 2

d-) Se multiplica a x por ½

Solución:

En las siguientes gráficas se explica los casos presentados.

Los casos a y b.



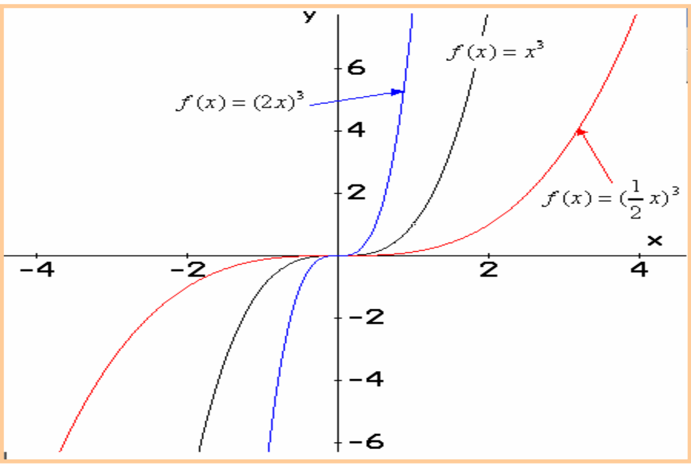
La función base es la función cúbica.

$f(x) = x^3$

Cuando se multiplica dicha función por 3, se presenta una compresión vertical.

Cuando se multiplica la función por 1/3, se presenta un estiramiento vertical.

Casos c, d:



La función base es la función cúbica.

$f(x) = x^3$

Cuando se multiplica la variable por 2, la función presenta una compresión vertical.

Cuando se multiplica la variable por 1/2, la función presenta un estiramiento vertical.

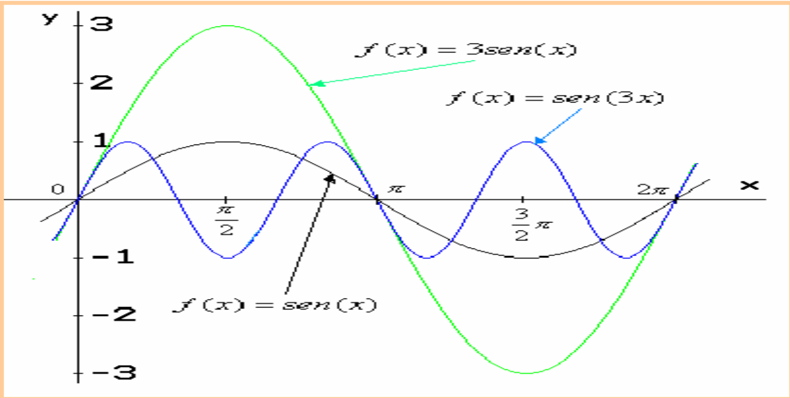
Ejemplo 2:

Para las funciones dadas a continuación identificar que tipo de estiramiento presentaron.

a-) $f(x) = 3sen(x)$

b-) $f(x) = sen(3x)$

Solución:



A partir de la función base, que para este caso es la función sen(x), al multiplicarla por 3, ésta se estira verticalmente.

Pero si multiplicamos la variable por 3, la función se encoge horizontalmente.

Conclusiones:

A manera de resumen se puede comentar:

Cuando a una función base se le suma una constante la función se traslada ya sea horizontal o verticalmente.

Cuando a una función base se le multiplica por una constante, la función se estira o encoge, pero no se traslada.

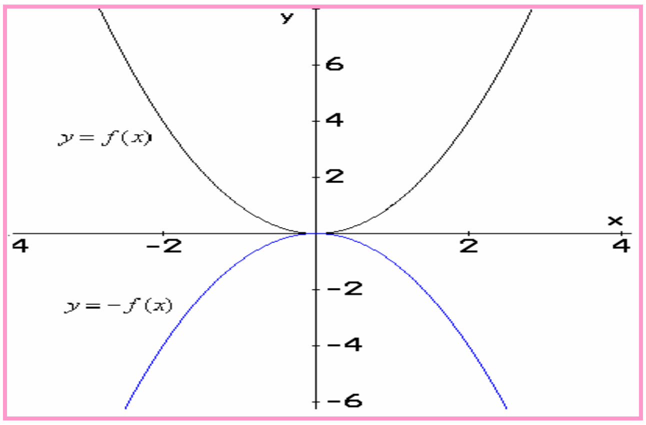
REFLEXIÓN:

A toda función f(x) se le puede hallar otra función que sea su reflejo. La función y su reflejo forman simetría respecto a los ejes coordenados.

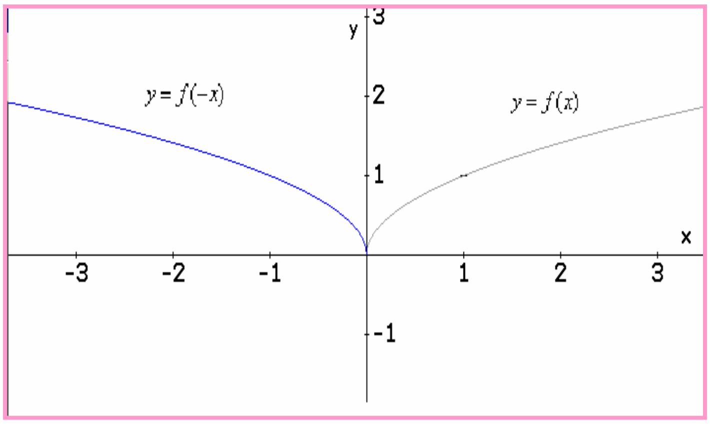
Sea f (x) una función, entonces - f (x) es el reflejo respecto al eje x.

Sea f (x) una función, entonces f (- x) es el reflejo respecto al eje y.

Veamos esta situación de manera gráfica.



La reflexión que se observa es con respecto al eje x.



La reflexión es este caso es con respecto al eje y.

EJERCICIOS

Para Las funciones dadas a continuación, a partir de la función base, identificar cuales fueron los cambios presentados y hacer la gráfica.

1. $f(x) = x^2 + 4$
2. $f(x) = (x-2)^2 + 3$
3. $g(x) = |x - 5|$
4. $g(x) = 2|x + 3| - 4$
5. $h(x) = 6\sqrt{x}$
6. $h(x) = 4\sqrt{x-1}$
7. $p(x) = e^{x-2}$
8. $p(x) = 3 + e^{x-4}$
9. $s(x) = sen(x + \frac{\pi}{2})$
10. $s(x) = 4\cos(x - \pi)$

FUNCIONES INVERSAS: $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$

En las funciones ocurre algo parecido a las operaciones matemáticas básicas, donde la resta anula la suma, la multiplicación anula la división, en este orden de ideas las funciones inversas anulan la función base, se caracterizan porque el dominio e imagen se invierten.

Es importante resaltar que para que una función se pueda invertir, ésta debe se INYECTIVA, la razón es lógica, si se invierten el dominio e imagen, se debe tener cuidado en que no se presenten dominios donde alguno de sus elementos tengan más de una imagen.

Definición: Sea y = f(x) una función Inyectiva (uno a uno), la inversa de f(x) es la función $f^{-1}(x)$, la cual tiene como dominio la imagen de f(x) y como imagen el dominio de f(x).

Dada la función $y = f(x)$, la función inversa se puede expresar de dos maneras

Forma Implícita: $x = f(y)$

Forma Explícita: $y = f^{-1}(x)$

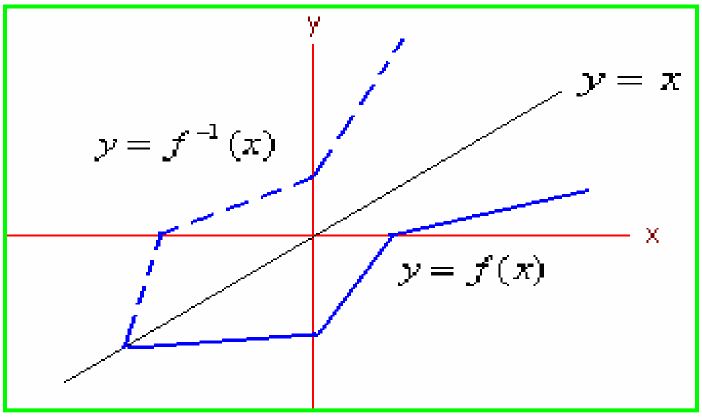
La *propiedad fundamental* de invertir funciones, establece que para todo x en el dominio de la función f(x):

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x \Leftrightarrow f^{-1}\left(f(x)\right) = x$$

En las condiciones analizadas, se puede inferir que las funciones monótonas son invertibles, es decir las funciones crecientes o decrecientes.

Veamos las características básicas de las funciones inversas:

Dominio: El dominio de $f^{-1}(x)$ es la imagen de f(x)
Imagen: La imagen de $f^{-1}(x)$ es el dominio de f(x)
Simetría: Las funciones f(x) y $f^{-1}(x)$ son simétricas respecto a la recta y = x.

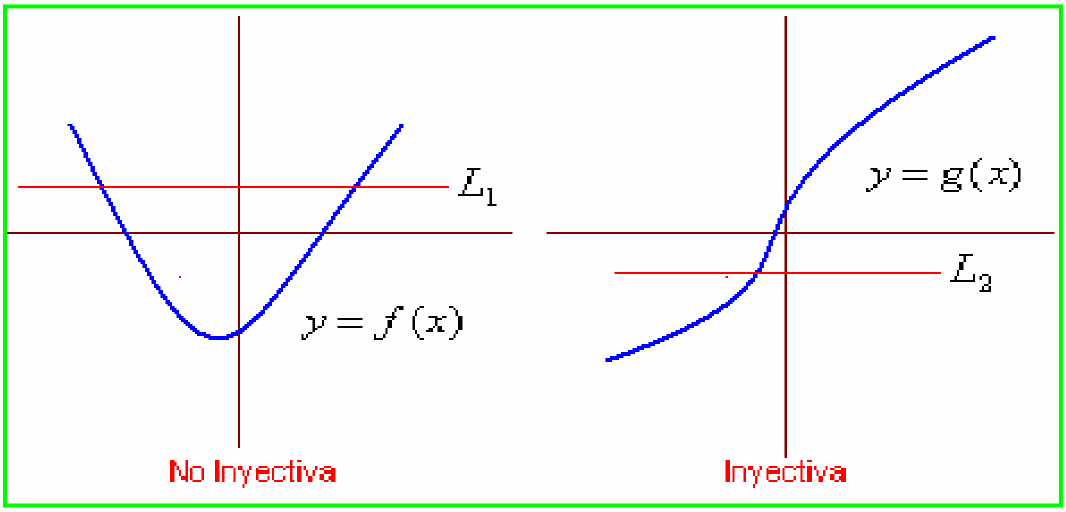


La recta y = x, es el eje de simetría de las funciones

f(x) y $f^{-1}(x)$.

FUNCIONES ALGEBRÁICAS INVERSAS:

Las funciones polinómicas de grado impar, como las de grado uno y tres son inyectivas, las funciones radicales también son inyectivas, este tipo de función es invertible, en general como se dijo anteriormente todas las funciones monótonas. Existe un método gráfico para identificar si una función es inyectiva, consistente en trazar una recta horizontal en cualquier punto del plano y verificar que corta a la curva en un solo punto.



Se observa que L_1 corta la curva en más de un punto, luego f(x) no es invectiva, para el caso de g(x) la recta corta a la curva solo en un punto, por consiguiente g(x) es inyectiva.

Ejemplo 1:

Halar la función inversa de $f(x) = 4x - 5$

Solución:

Como la función es lineal, se puede obtener su inversa. El procedimiento consiste en despejar la variable x y obtener una nueva función donde y es la variable independiente. Veamos:

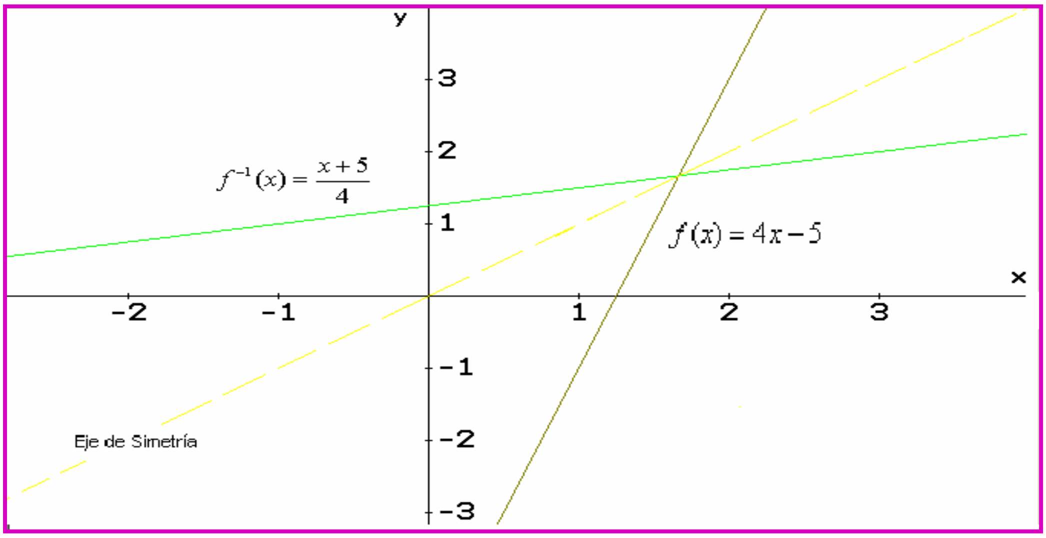
$$y = 4x - 5 \Rightarrow\Rightarrow y + 5 = 4x \Rightarrow\Rightarrow x = \frac{y+5}{4}$$

Así la función inversa será:

Forma Implícita: $x = \dfrac{y+5}{4}$

Forma Explícita: $f^{-1}(x) = \dfrac{x+5}{4}$

La gráfica siguiente nos muestra el comportamiento de la función f(x) y su inversa.



Ejemplo 2:

Dada la función: $g(x) = x^3$ Hallar $g^{-1}(x)$.

Solución:

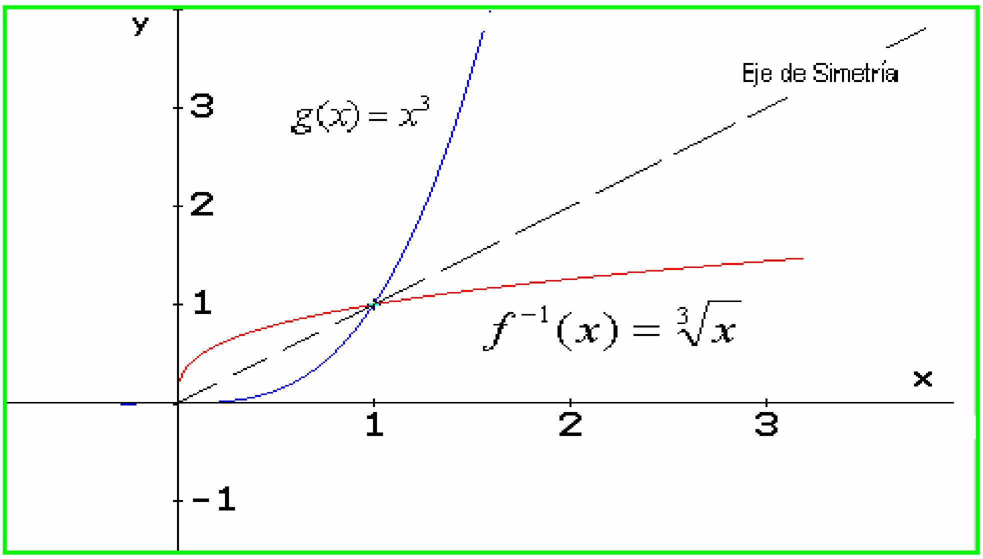
Por la teoría analizada, la función tiene inversa, ya que es un polinomio de grado impar. Entonces despejamos la variable x.

$$y = x^3 \Rightarrow\Rightarrow \sqrt[3]{y} = x$$

La inversa es:

Forma Implícita: $x = \sqrt[3]{y}$

Forma Explicita: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$



Ejemplo 3:

Identificar la inversa de la función: $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$

Solución:

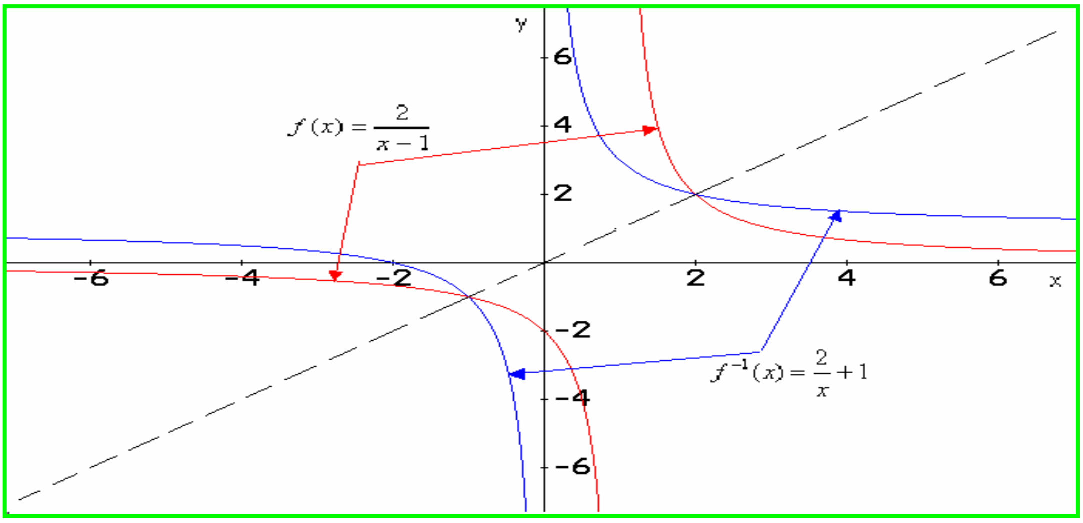
La función es inyectiva, luego tiene inversa.

$$y = \frac{2}{x-1} \Rightarrow\Rightarrow x-1 = \frac{2}{y} \Rightarrow\Rightarrow x = \frac{2}{y}+1$$

La inversa en las dos formas:

Forma Implícita: $x = \dfrac{2}{y}+1$

Forma Explícita: $f^{-1}(x) = \dfrac{2}{x}+1$



Ejemplo 4:

Determinar la inversa de: $g(x) = \dfrac{x-1}{3x+4}$

Solución:

Despejamos la variable x para obtener la inversa.

$$y = \frac{x-1}{3x+4} \Rightarrow\Rightarrow y(3x+4) = x-1 \Rightarrow\Rightarrow 3xy+4y-x = 1 \Rightarrow\Rightarrow 3xy-x = -4y-1$$

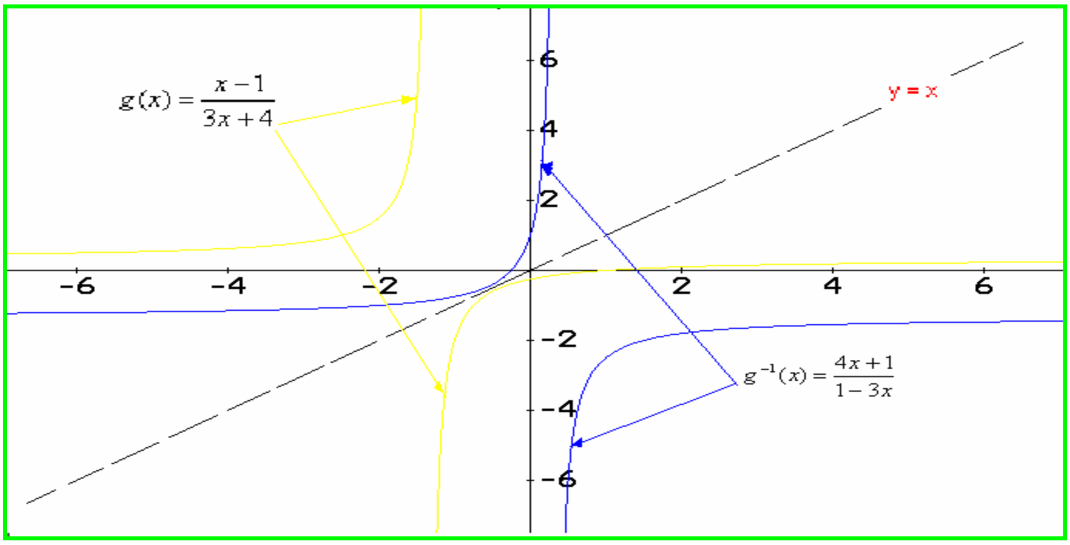
$$x(3y-1) = -4y-1 \Rightarrow\Rightarrow x = \frac{-4y-1}{3y-1}$$

Así la función inversa es:

Forma Implícita: $x = \dfrac{-4y-1}{3y-1}$

Forma Explícita: $g^{-1}(x) = \dfrac{-4x-1}{3x-1} = \dfrac{4x+1}{1-3x}$

Veamos las gráficas.



Para comprobar si la inversión de la función fue correcta, se puede aplicar la propiedad fundamental:

$$f\left(f^{-1}(x)\right)=f^{-1}\left(f(x)\right)=x$$

Apliquémoslo para el ejemplo 1, $f\left(f^{-1}(x)\right)=4\left(\frac{x+5}{4}\right)-5=x+5-5=x$

Para el ejemplo 2: $g\left(g^{-1}(x)\right)=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3=x$

Se observa que la propiedad se cumple. Como ejercicio de refuerzo, desarrolle lo mismo para los ejemplos e y 4.

EJERCICIOS

De las siguientes funciones determinar si son inyectivas y justificar la respuesta.

1. $f(x) = 5x - 6$ Rta: Sí

2. $g(x) = x^2 + 4$ Rta: No

3. $h(x) = |x|$ Rta: No

4. $p(x) = \sqrt{4 - x^2}$ Rta: Sí

5. $m(x) = \dfrac{4x^2 - 2x}{\sqrt{x-1}}$ Rta: No

Las funciones dadas a continuación son inyectivas, hallar la función inversa y su dominio.

6. $f(x) = 10 - 4x$ Rta: $f^{-1}(x) = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4}$

7. $g(x) = \dfrac{4x}{5 + x}$ Rta: $g^{-1}(x) = \dfrac{5x}{4 - x}$

8. $l(x) = 4 - x^3$ Rta: $l^{-1}(x9 = \sqrt[3]{x - 4}$

FUNCIONES TRASCENDENTALES INVERSAS:

Las funciones trascendentales inversas son muy importantes ya que tienen mucha utilidad en la integración, en la solución de ecuaciones y otras áreas.

Función Exponencial: Sabemos que la función exponencial es inyectiva, por consiguiente tiene inversa la cual es la función logarítmica.

DEFINICIÓN:

Sea $f(x)=a^x$, entonces $f^{-1}(x)=Log_a(x)$

Demostración:

A partir de: $y=a^x \Rightarrow\Rightarrow Log_a(y)=Log_a(a^x)\Rightarrow\Rightarrow Log_a(y)=x$ Expresándola en forma explícita: $Log_a(y)=x\Rightarrow\Rightarrow f^{-1}(x)=Log_a(x)$

Analizando las funciones exponenciales más conocidas, la natural y la decimal:

$$f(x)=e^x \Rightarrow\Rightarrow f^{-1}(x)=Ln(x)$$

$$f(x)=10^x \Rightarrow\Rightarrow f^{-1}(x)=Log(x)$$

Función Logarítmica: Sabemos que la función logarítmica también es inyectiva, por consiguiente tiene inversa la cual es la función exponencial.

DEFINICIÓN:

Sea $f(x)=Log_a(x)$, entonces $f^{-1}(x)=a^x$

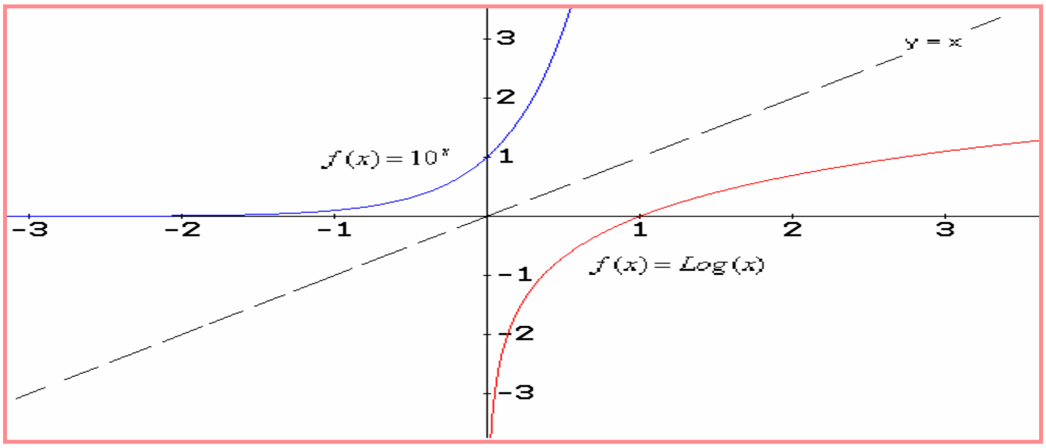
Demostración:

A partir de: $y=Log_a(x)\Rightarrow\Rightarrow a^y=a^{Log_a(x)}\Rightarrow\Rightarrow a^y=x$ Expresándola en forma explícita: $a^y=x\Rightarrow\Rightarrow f^{-1}(x)=a^x$

Analizando las funciones logarítmicas más conocidas, la natural y la decimal:

$$f(x)=Ln(x)\Rightarrow\Rightarrow f^{-1}(x)=e^x$$

$$f(x)=Log(x)\Rightarrow\Rightarrow f^{-1}(x)=10^x$$



EJERCICIOS

Para cada una de las funciones dadas, identificar la inversa.

1. $f(x) = e^{2x}$ Rta: $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}Ln(x)$

2. $g(x) = 3 + Ln(x)$ Rta: $g^{-1}(x) = e^{x-3}$

3. $h(x) = \frac{e^x}{4}$ Rta: $h^{-1}(x) = Ln(4) + Ln(x)$

4. $N(x) = Log\left(\frac{2+x}{x}\right)$ Rta: $N^{-1}(x) = \frac{2}{10^x - 1}$

Para las funciones dadas a continuación, graficas la función y su inversa.

5. $f(x) = 10^{3x}$

6. $g(x) = e^{4x}$

7. $h(x) = Ln(4x)$

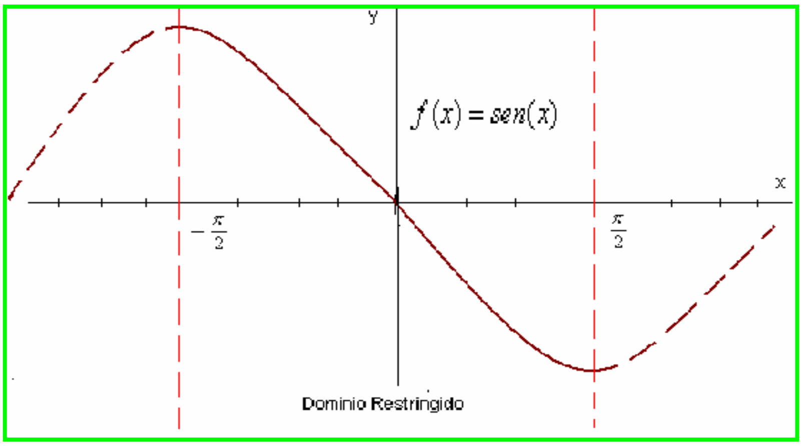
8. $J(x) = 3Log(2x)$

Función Trigonométrica Inversas: Sabemos que las funciones trigonométricas no son inyectivas, ya que por ser periódicas se repiten cada ciento valor del dominio, por ejemplo la función seno se repite cada 2π, la función tangente cada π, así las demás.

Para poder invertir las funciones trigonométricas, se hace un análisis del dominio, haciendo lo que se conoce como la "*Restricción del Dominio*", que consiste en tomar solo una parte de éste, donde la función sea monótona, ya que de esta manera si se pueden invertir.

Veamos el proceso:

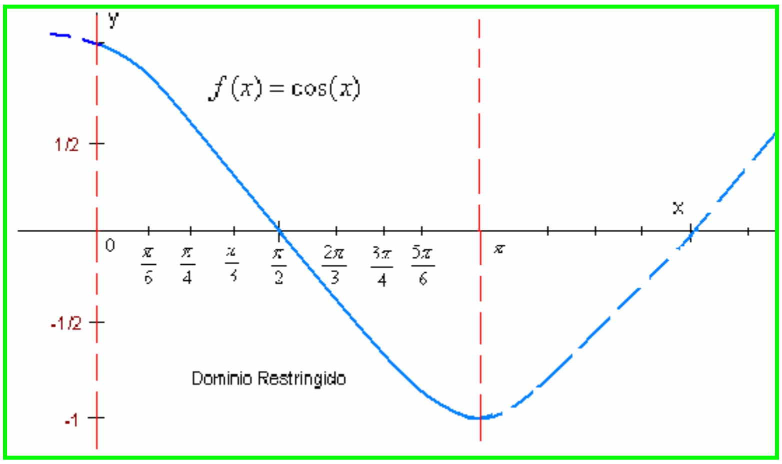
Seno:



Dominio restringido para el seno es: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

En este intervalo la función es decreciente

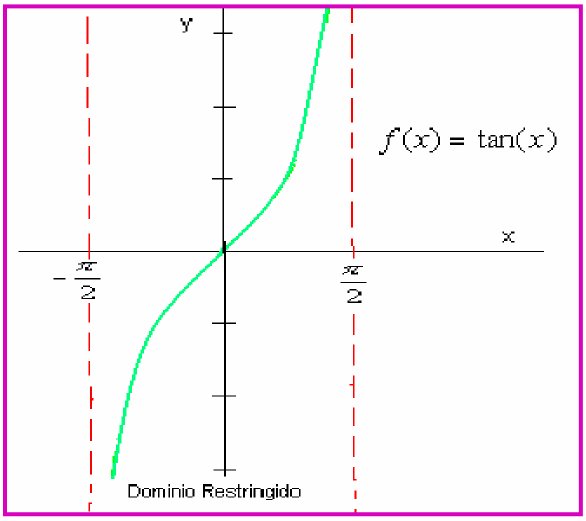
Coseno:



El dominio restringido para el coseno es: $[0, \pi]$

En este intervalo la función es decreciente

Tangente:



El dominio restringido para el coseno es: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

En este intervalo la función es creciente

Para el caso de las funciones restantes:

Cotangente: Dominio restringido: $(0, \pi)$ en este intervalo la función es decreciente.

Secante: Dominio restringido $(0, \pi)$ excepto $\frac{\pi}{2}$ En este intervalo al función es creciente.

Cosecante: Dominio restringido $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ excepto 0. En este intervalo la función es creciente.

En estas condiciones las funciones trigonométricas se pueden invertir.

Seno Invertido:

Sea $f(x) = sen^{-1}(x)$ Se define como la función inversa del seno o arcoseno de la variable x.

Dominio: Son los números reales comprendidos: $[-1, 1]$

Imagen. Los ángulos entre $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Simetría: la función $sen^{-1}(x)$ es impar, luego es simétrica respecto al origen de coordenadas.
Monotonía: Creciente en su dominio.

Coseno Invertido:

Sea $f(x) = \cos^{-1}(x)$ Se define como la función inversa del coseno o arco coseno de la variable x.

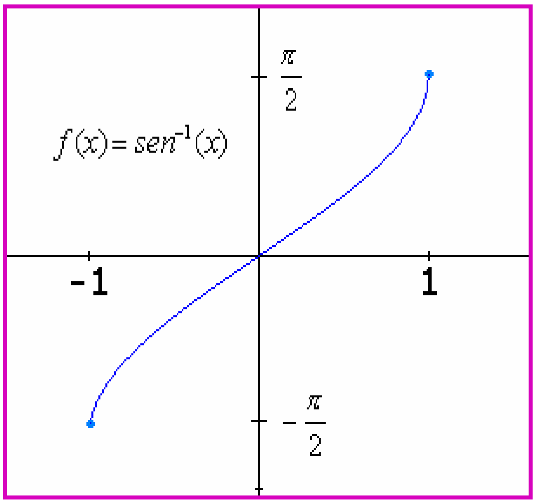
Dominio: Son los números reales comprendidos: $[-1,1]$

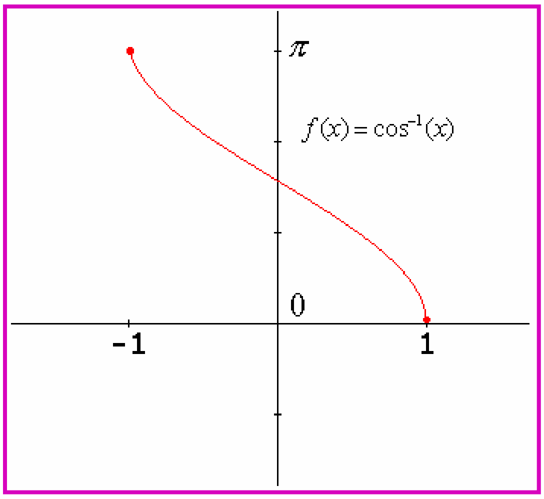
Imagen. Los ángulos entre $[0,\pi]$

Simetría: la función $\cos^{-1}(x)$ es impar, luego es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Monotonía: Decreciente en su dominio.

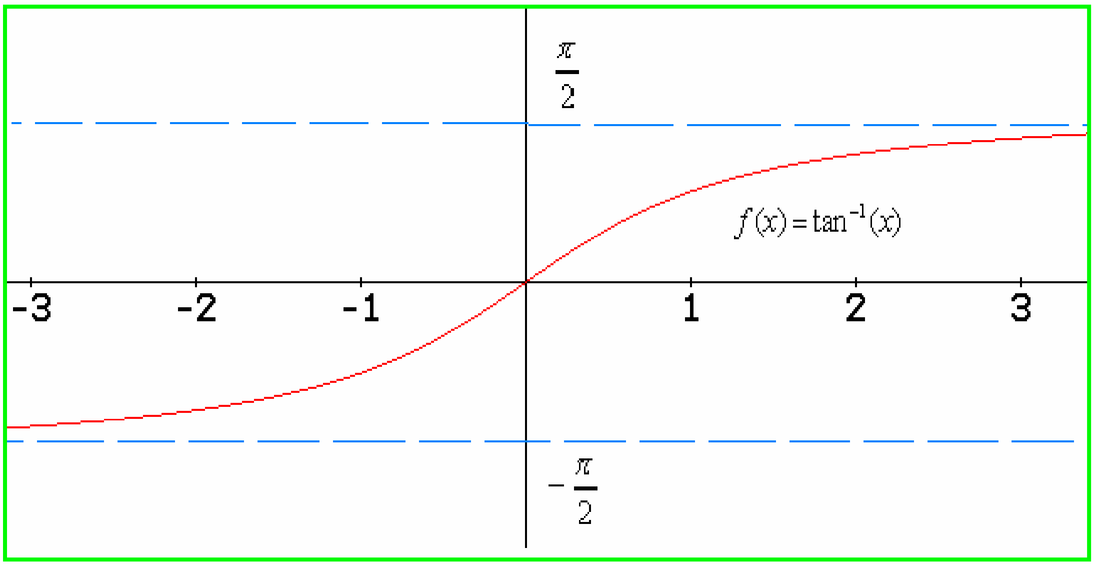
Veamos las gráficas de estas funciones.

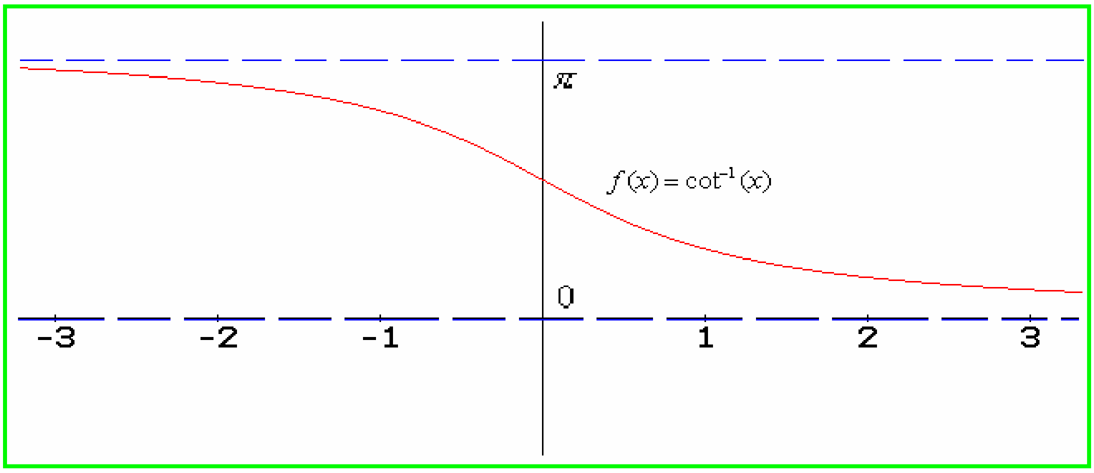




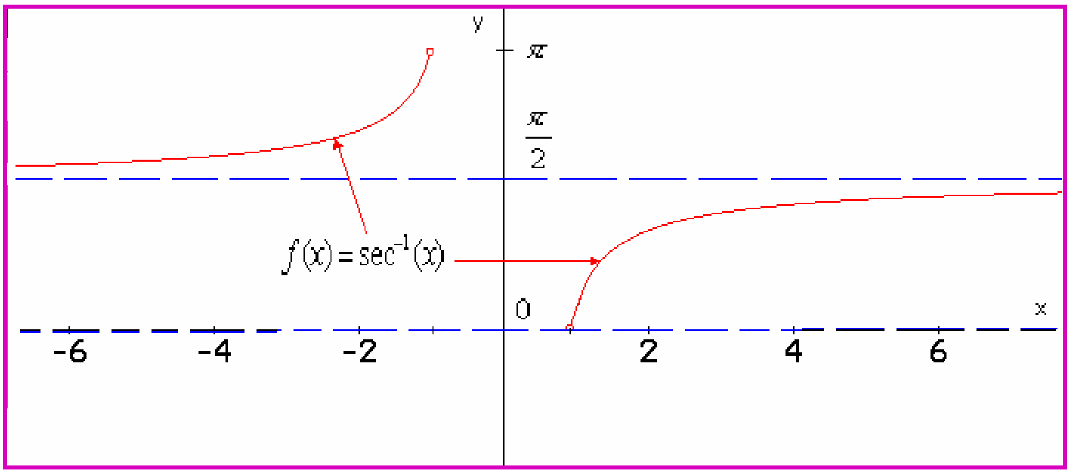
Veamos las otras funciones trigonométricas inversas:

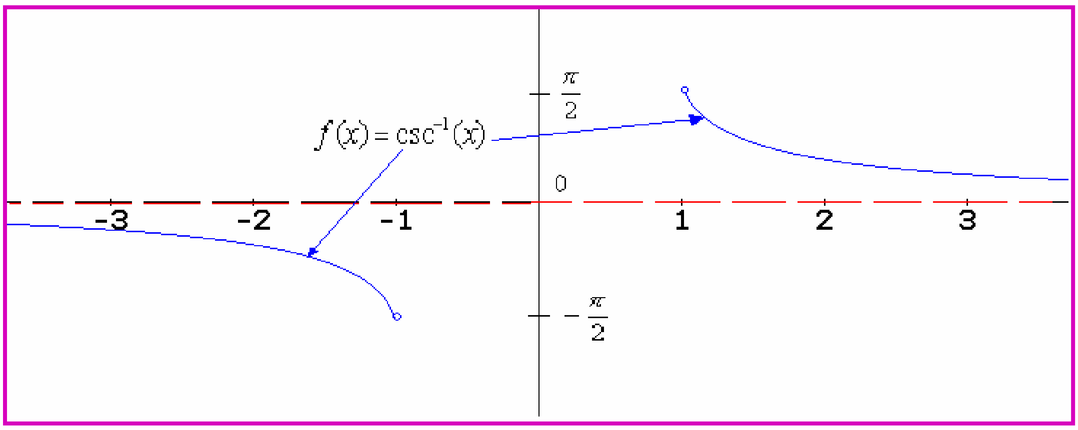
FUNCIÓN	DOMINIO	IMAGEN	SIMETRÍA	MONOTONÍA
$\tan^{-1}(x)$	$(-\infty,\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	Impar	Creciente
$\cot^{-1}(x)$	$(-\infty,\infty)$	$(0,\pi)$	¿Investigar?	¿Investigar?





FUNCIÓN	DOMINIO	IMAGEN	SIMETRÍA	MONOTONÍA
$\sec^{-1}(x)$	$\lvert x\rvert \geq 1$	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$	¿Investigar?	¿Investigar?
$\csc^{-1}(x)$	$\lvert x\rvert \geq 1$	$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	¿Investigar?	¿Investigar?





Ejemplo 1:

Hallar $y = \text{sen}^{-1}(1/2)$

Solución:

Lo que se debe hacer es buscar en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ que es el conjunto de la imagen del arco seno, un ángulo para el cual el seno vale ½, se sabe que el sen(π/6) es 1/2 , luego:
$\text{sen}^{-1}(1/2) = \pi/6$, entonces: $y = \pi/6$

Ejemplo 2:

Resolver: $y = \tan^{-1}(1)$.

Solución:

En el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se debe buscar una ángulo para el cual su tangente vale 1. El ángulo para el cual la tangente es 1, corresponde a π/4 (45^0). Entonces:
$\tan^{-1}(1) = \pi/4$, por consiguiente $y = \pi/4$

Ejemplo 3:

Hallar el ángulo o ángulos para el cual: $y = \cos^{-1}(\sqrt{2}/2)$

Solución:

El arco coseno tiene como imagen, el intervalo $[0, \pi]$ Se debe buscar el ángulo o ángulos en este intervalo donde el coseno vale $\sqrt{2}/2$. Se sabe que el coseno de π/4 es igual a $\sqrt{2}/2$.

Entonces: $\cos^{-1}(\sqrt{2}/2) = \frac{\pi}{4}$

Ejemplo 4:

Resolver: $y = \cos^{-1}(1/2) + \cot^{-1}(\sqrt{3})$

Solución:

Se debe hallar el arco coseno de ½ y el arco cotangente de $\sqrt{3}$.

Para el $\cos^{-1}(1/2) = \frac{\pi}{3}$ (Justifique *esta respuesta estimado estudiante*)

Para la $\cot^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$. Recordemos que para $\cot^{-1}(x)$ el intervalo de la imagen es $(0, \pi)$

Ahora: $y = \cos^{-1}(1/2) + \cot^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, Así: $y = \pi/2$

Ejemplo 5:

Hallar el ángulo para los valores dados:

a-) $\text{Sen}^{-1}(0{,}05)$ b-) $\cos^{-1}(0{,}9135)$

Solución:

a-) El valor dado $\text{Sen}^{-1}(0{,}05)$ se puede hallar a través de las tablas de funciones trigonométricas. El valor se encuentra así:

ANGULO	VALOR
$2{,}82^0$	0,0488
X	0,05
$2{,}92^0$	0,0506

Por interpolación: x = 2,986 (*Compartir con su Profesor el proceso de interpolación*)
En el programa D. Se pulsa **shift** con **sin^{-1}** se ingresa el valor para este caso (0,05) la calculadora arroja el valor 2,866 que será el valor del ángulo correspondiente.

b-) Igual que en el caso anterior. $\cos^{-1}(0{,}9135)$
En la tabla corresponde a 24^0
Por la calculadora: **shift** $\rightarrow$ **sin^{-1}** $(0{,}9135) = 24{,}0064^0$

Funciones Hiperbólicas Inversas: De las funciones hiperbólicas: senh(x), tanh(x), coth(x) y csch(x) son inyectivas, luego tienen inversa. Para el caso de cosh(x) y sech(x), por no ser inyectivas, se les debe restringir su dominio.

El siguiente cuadro resume las funciones hiperbólicas inversas, en donde se presente la palabra investigar en para que usted estimado estudiante, indague en diferentes fuentes para encontrar la respuesta a dicho interrogante.

FUNCIÓN	DOMINIO	IMAGEN	SIMETRÍA	MONOTONÍA	EXPLÍCITA
$\text{Senh}^{-1}(x)$	Reales	Reales	Impar	Creciente	$Ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
$\text{Cosh}^{-1}(x)$	$x \geq 1$	$y \geq 0$	Investigar	Creciente	$Ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ Para $x \geq 1$
$\text{Tanh}^{-1}(x)$	$-1 < x < 1$	Reales	Impar	Creciente	$\frac{1}{2} Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
$\text{Coth}^{-1}(x)$	Investigar	Investigar	Investigar	Investigar	Investigar
$\text{Sech}^{-1}(x)$	$0 < x \leq 1$	$y \geq 1$	Investigar	Decreciente	$Ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ Para $0 < x \leq 1$
$\text{Csch}^{-1}(x)$	Investigar	Investigar	Investigar	Investigar	Investigar

Del cuadro surge una pregunta ¿Cómo se obtiene la forma explicita de la función? A manera de ejemplo desarrollemos la del $\cosh^{-1}(x)$.

Sea $y = \cosh^{-1}(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} \Rightarrow\Rightarrow 2y = e^{x} + e^{-x}$

La última expresión la multiplicamos por $2e^{x}$, luego:

$$4ye^{x} = 2e^{x}(e^{x} + e^{-x}) \Rightarrow\Rightarrow 4ye^{x} = 2e^{2x} + 2$$

Dividimos por 2 toda la última expresión e Igualando a cero se obtiene:

$$2ye^{x} - e^{2x} - 1 = 0$$

Ajustándola a una ecuación cuadrática:

$$(e^{x})^{2} - 2y(e^{x}) + 1 = 0$$

Entonces:

$$e^{x} = \frac{2y + \sqrt{(2y)^{2} - 4}}{2} = y + \sqrt{y^{2} - 1}$$

$$e^{x} = y + \sqrt{y^{2} - 1}$$

Despejando la variable x:

$$Ln(e^{x}) = Ln(y + \sqrt{y^{2} - 1}) \Rightarrow\Rightarrow x = Ln(y + \sqrt{y^{2} - 1})$$

Así, aplicando la definición de inversa:

$$f^{-1}(x) = Ln(x + \sqrt{x^{2} - 1}) \quad \text{Para} \quad x \geq 1$$

En el pequeño grupo colaborativo se debe trabajar en la demostración de las demás funciones explícitas de las hiperbólicas inversas. Luego se debe socializar con el tutor para aclarar las dudas encontradas.

EJERCICIOS

Desarrolle los siguientes ejercicios, utilizando la tabla de funciones trigonométricas o la calculadora.

Hallar el valor de y para las siguientes funciones.

1. $y = sen^{-1}(1)$ Rta: π/2

2. $y = \cos^{-1}(1)$ Rta: 0

3. $y = \tan^{-1}(-\sqrt{3})$ Rta: - π/3

4. $y = \cot^{-1}(\sqrt{3})$ Rta: π/6

5. $y = \sec^{-1}(2)$ Rta: π/3

6. $y = \csc^{-1}(\sqrt{2})$ Rta: π/4

7. $y = \tan^{-1}(0{,}1743)$ Rta: 10^0

8. $y = \sec^{-1}(1{,}0353)$ Rta: 15^0

9. $sen(\cos^{-1}(0{,}707)$ Rta: 0,707

10. $\tan^{-1}(\cos(\frac{\pi}{6}))$ Rta: $40{,}9^0$

11. Demuestre que si $f(x) = senh(x)$, entonces: $f^{-1}(x) = senh^{-1}(x) = Ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$
   Una ayuda: senh(x) + cosh(x) = e^x y que: $\cosh^2(x) + senh^2(x) = 1$

12. Hallar $\cosh^{-1}(2x)$ Rta: $\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2e^2}$

APLICACIÓN DE FUNCIONES

Las funciones tienen aplicaciones en todas las áreas del saber, por lo cual se desea presentar algunas de las muchas conocidas, los ejemplos modelos son una motivación para que con estos y otros que pueda analizar, estimado estudiante adquiera mucha destreza para resolver problemas con funciones. Se presentarán casos con funciones algebraicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

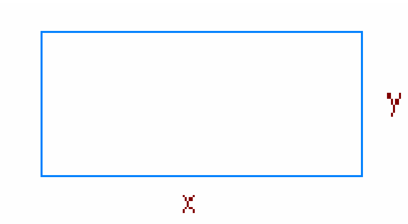
ALGEBRÁICAS:

La mejor manera de explicar estos casos es con ejemplos modelos.

Ejemplo 1:

El perímetro de un rectángulo mide 120 cm. Expresar el área del rectángulo como función de la longitud de su largo.

Solución:



Perímetro: $2x + 2y = 120$
P: $x + y = 60$
Despejamos y, entones:

$y = 60 - x$

Área del rectángulo: $A = x * y$

$A = x * (60 - x) = 60x - x^2$
$A(x) = 60x - x^2$
Así queda expresada el área en función del largo.

Ejemplo 2:

La relación entre la temperatura del medio ambiente y la altitud es aproximadamente lineal, para $0 \leq y \leq 3.500$ T = grados centígrados (^{0}C) y y = metros. La temperatura a nivel del mar es aproximadamente 16^0C al aumentar la altitud a 1.500 metros, la temperatura disminuye en 7^0C.
a-) Hallar T(y); es decir, la temperatura en función de la altitud.
b-) Qué temperatura ambiental habrá a 2.00 metros de altura.
c-) A qué altitud la temperatura será de 0^0C.

Solución:

a-) Por las condiciones del problema: $T = my + b$ donde T es la temperatura, m la pendiente de la recta; ya que es una relación lineal, y la altitud y b el intercepto. El problema nos describe que para $T = 16^0$C, y = 0 metros, así se tiene un punto, con este podemos hallar el intercepto b:

A partir de: $T = my + b$ reemplazamos: $16 = m(0) + b \Rightarrow\Rightarrow b = 16$

Para hallar el otro punto que nos permita obtener la pendiente, el problema también nos dice que cuando y = 1.500 m. La temperatura disminuye en 7^0C, entonces: T = 16^0C – 7^0C = 9^0C.

Luego por la ecuación lineal: $9 = 1.500\,m + 16$

En seguida calculamos la pendiente, despejando *m* de la ecuación anterior:

$$m = \frac{T-b}{y} = \frac{9-16}{1.500} = -\frac{7}{1.500}$$

Así la expresión que describe la temperatura en función de la altura es:

$$T = -\frac{7}{1.500}y + 16$$

b-) A 2.00 metros de altura, la temperatura será:

$$T = -\frac{7}{1.500}(2.000) + 16 = 6{,}67\,^0C$$

C-) A 0^0C la altitud será:

$$0 = -\frac{7}{1.500}y + 16 \Rightarrow\Rightarrow \frac{7}{1.500}y = 16 \Rightarrow\Rightarrow 7y = 16 * 1500$$

Finalmente:

$$y = \frac{24.000}{7} = 3.428{,}57\ m$$

Como y esta en el rango que se considero en el planteamiento del problema, el dato es confiable.

Ejemplo 3:

Expresar el área del círculo como función del perímetro.

Solución:

El área del círculo es: $A = \pi R^2$ y el perímetro $P = 2\pi R$

La idea es despajar R de la ecuación del perímetro y reemplazarlo en el área:

$$P = 2\pi R \Rightarrow\Rightarrow R = \frac{P}{2\pi}$$

Ahora:

$$A = \pi R^2 \Rightarrow\Rightarrow A = \pi\left(\frac{P}{2\pi}\right)^2$$

Por consiguiente:

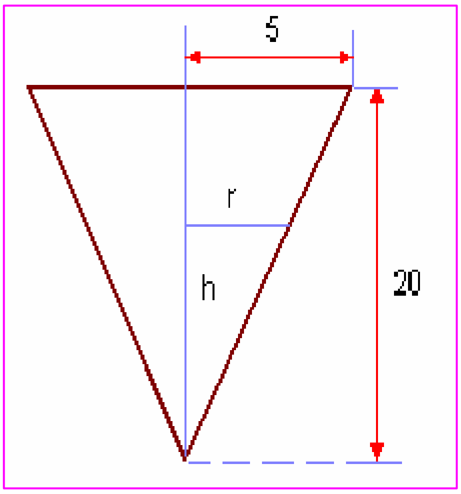
$$A(P) = \frac{P^2}{4\pi}$$

Ejemplo 4:

Un tanque de almacenamiento de líquido tiene forma de cono circular recto, con una altura de 20 metros y radio de la base de 5 metros. Expresar el volumen del líquido en cualquier instante como función de la altura de líquido.

Solución:

Una gráfica nos ayudará a resolver el problema.



Por geometría sabemos que el volumen de un cono circular recto esta dado por la ecuación:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

Se observa que el volumen depende del radio y de la altura.

El problema consiste en expresar el volumen solo en función de la altura.

Una buena observación de la figura y los conocimientos previos sobre proporcionalidad, nos resuelve el problema.

En la figura se observan dos triángulos semejantes (*estimado estudiante detéctelos*) Se sabe que cuando hay dos triángulos semejantes, sus lados correspondientes son proporcionales, según la figura:

$$\frac{20}{5} = \frac{h}{r} \Rightarrow\Rightarrow r = \frac{5h}{20} = \frac{h}{4}$$

Ahora reemplazamos en la ecuación del volumen:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{48}$$

Finalmente:

$$V(h) = \frac{\pi}{48} h^3$$

Ejemplo 5:

Para el ejemplo 4, ¿A qué altura estará el líquido si el volumen de éste es de 4 m ^{3}?

Solución:

Como se conoce la función: $V(h)=\frac{\pi}{48}h^3$ reemplazamos los valores y despejamos la incógnita.

$$V(h)=\frac{\pi}{48}h^3 \Rightarrow\Rightarrow 4=\frac{\pi}{48}h^3 \Rightarrow\Rightarrow \pi h^3 = 192$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{192}{\pi}} = 3,938 \quad m$$

Ejemplo 6:

El costo de producción de un artículo esta dado por los costos fijos más los costos variables. En una compañía los costos fijos de producción son de \$50.000, el costo de producir una unidad es de \$200 ¿Cuánto costará producir 1.000 unidades?

Solución:

Costo total = Costos fijos + Costos variables. La siguiente función puede expresar matemáticamente el fenómeno. $C(x)=K+n(x)$

Con los datos dados en el problema:

$$C(x)=K+n(x)\Rightarrow\Rightarrow C(x)=50.000+200x$$

Para producir 1.00 unidades, el costo será:

$$C(x=1.000)=50.000+200(1.000)=250.000$$

Por consiguiente producir 1.000 unidades costará \$250.000

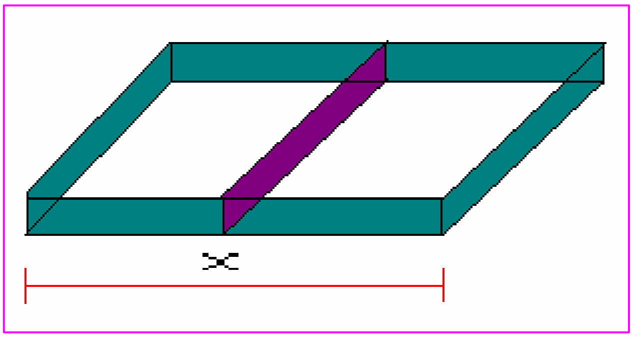
EJERCICIOS

Resolver los siguientes problemas utilizando todos los principios aprendidos en esta temática tan interesante. Si requiere de dibujos por favor utilizarlos.

1. Dado un cubo de lado *l*, expresar el volumen de cubo como función del área de la base.

Rta: $V = \sqrt{A^3}$

2. Para la gráfica dada, el perímetro P corresponde al total de la longitud, los dos triángulos son iguales. El área total es de 4.000 m ^{2}. Expresar el perímetro en función de la longitud *x*.



Rta: $P(x) = 2x + \dfrac{12.000}{x}$

3. El crecimiento de un bebe de más de 84 días de gestación esta dado por la expresión: $L(t) = 1{,}52t - 6{,}8$ donde L es la longitud en centímetros, t el tiempo en semanas. ¿Cuál será la edad de gestación de un bebe cuya longitud es de 35 cm?

Rta: t = 27, 5 semanas

4. Un jugador de fútbol tiene un record de goles dado por 8 goles en 17 partidos. El jugador fue alineado en 180 juegos manteniendo el record de goles.
a-) Expresar el número de goles como función del número de alineamientos donde participo el
jugador.
b-) Cuantos goles anoto en la temporada de los 180 partidos.

Rta: a-) $G(l) = \dfrac{8}{17}l$ b-) 85 goles

5. Un cilindro circular recto de volumen V, altura h y radio R tiene una altura el doble del radio. Expresar el volumen del cilindro como función del radio.

Rta: $V(R) = 2\pi R^3$

6. Sea la función $g(x) = x^2 - 8$ el punto (x, y) esta sobre la gráfica de g(x), Expresar la distancia D que se presenta desde p(x, y) al punto q(0, -1) como función de *x*.

Rta: $D = \sqrt{x^4 - 13x^2 + 49}$

EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS:

Existen muchos fenómenos que son explicados por funciones de tipos exponenciales o logarítmicos, como los presentados a continuación:

Ejemplo 1:

En economía una función muy conocida es la de interés compuesto. Si se invierten *C* pesos a un interés *i* compuesto anualmente en *t* años, el monto *P* esta dado por:

$$P = C(1+i)^t$$

Un ciudadano invierte $500.000 al 10% de interés anual compuesto. ¿Cuanto tendrá al tercer año y de cuanto fue la ganancia en intereses?

Solución:

Vemos que la función que gobierna este fenómeno es una función exponencial.
Los datos:
C = $500.000
I = 10% = 0,1
t = 3 años
La incógnita: P = ?

Reemplazando el la ecuación del monto:

$$P = C(1+i)^t \Rightarrow\Rightarrow P = 500.000(1+0,1)^3 = 500.000(1,1)^3 = 665.500$$

El monto al cabo del tercer año es de $665.500. La ganancia en este tiempo fue de $165.500

Ejemplo 2:

En medicina la recuperación normal de una herida se puede modelar por medio de una función exponencial. Sea A_0 el área original de la herida y A es área de la herida después de n días. Luego la función de recuperación es de la forma:

$$A = A_0 e^{-0.35n}$$

En un proceso de recuperación ¿Cuántos medirá una herida a los 3 días si el área inicial es de 1,5 cm ^{2}?

Solución:

A = incógnita
A_0 = 1,5 cm ^{2}
N = 3 días

Reemplazando en la ecuación tenemos:

$$A = 1,5e^{-0.35(3)} = 0,525\,cm^2$$

A los 3 días le herida ha disminuido en 0,525 cm ^{2}

Ejemplo 3:

El pH de una solución química esta dad por la función: $pH = -Log\left[H^+\right]$ donde $\left[H^+\right]$ es la concentración de iones hidrogeno en moles por litro. ¿Cuál será la concentración de iones de hidrógeno para un pH = 6.

Solución:

A partir de la ecuación, se despeja $\left[H^+\right]$ reemplazando el valor del pH.

$$6 = -Log\left[H^+\right] \Rightarrow\Rightarrow -6 = Log\left[H^+\right] \Rightarrow\Rightarrow 10^{-6} = 10^{Log\left[H^+\right]}$$

Por operaciones inversas:

$$10^{-6} = 10^{Log\left[H^+\right]} \Rightarrow\Rightarrow \left[H^+\right] = 10^{-6}$$

Luego para un pH de 6, la concentración de iones hidrógenos es de 10^{-6}

Ejemplo 4:

Una solución tiene una concentración de $2X10^{-8}$ iones hidrógeno, cual será su pH.

Solución:

Con el grupo colaborativo, muestren que dicho pH = 7,698

Ejemplo 5:

La escala de Richter permite medir el nivel de los sismos, función esta dada por una ecuación donde la medida Richter depende de la intensidad mínima y la intensidad en un instante dado.

$$R = Log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

R = Nivel Ritcher
I_0 = Intensidad mínima
I = Intensidad en un instante dado.
En un sismo la intensidad fue de 500 veces la intensidad mínima, ¿cual será el nivel de Richter?

Solución:

Como I = 500 I_0 entonces:

$$R = Log\left(\frac{500 I_0}{I_0}\right) = Log(500) = 2{,}699$$

Cuando la intensidad de un sismo es 500 veces la intensidad mínima el nivel Ritcher es de 2,699

Ejemplo 6:

En un sismo la intensidad mínima es I_0, si el nivel de Ritcher es de 4,5 ¿De cuanto fue la intensidad de dicho sismo?

Solución:

Con la ecuación de R, debemos despejar la intensidad I, entonces:

$$R = Log\left(\frac{I}{I_0}\right) \Rightarrow\Rightarrow 10^R = \frac{I}{I_0} \Rightarrow\Rightarrow I = I_0 10^R$$

Reemplazando los datos:

$$I = I_0 10^{4,5} \Rightarrow\Rightarrow I = I_0(31.622,77)$$

Para dicho sismo la intensidad es 31.622,77 veces su intensidad mínima.

EJERCICIOS

La tasa de interés compuesto esta dado por la expresión:

$$A = ce^{it}$$

Donde: A = cantidad acumulada a los t años. C = capital inicial, i = interés anual, expresado en tanto por uno y t = años de C invertidos.

Resolver los problemas 1, 2 y 3 con esta información.

1. Si depositamos $1.00 al 33 / 4 de interés anual, ¿Cuál será el saldo a los 5 años de hacer el ahorro?

Rta: A = $1.510,59

2. En cierto tiempo t, la cantidad acumulada es de $10.500 el capital ahorrado fue de $8.500 y el interés fue del 9,2% ¿Qué tiempo transcurrió para obtener la cantidad acumulada?

Rta: t ≈ 2,3 años

3. Después de 4 años de depósito, un capital presenta una cantidad acumulada de $26.300 al 7,8% anual. ¿De cuanto fue el depósito inicial?

Rta: c = $19.252

En una investigación se determino que el área del cuerpo es su superficie esta dada por:

$$Log\,(A) = -2{,}144 + 0{,}425\,Log\,(m) + 0{,}725\,Log\,(h)$$

Donde: a = área superficial, m = masa del cuerpo en Kg y h = altura en metros.

Los problemas 4, 5 y 6 se resuelven con esta información.

4. Una persona tiene 75 Kg de peso y 1,80 metros de altura. ¿Cuál será e lárea superficial de sus cuerpo?

Rta: A = 0,06886 m^2

5. Una persona pesa 68 Kg, su área superficial es de 0,05615 m^2 ¿Cuál será sui estatura?

Rta: h ≈ 1,44 metros

6. Para montar un juego mecánico, la persona debe tener máximo 60 Kg de peso. José es medido y presenta un área superficial de 0,0725 m^2 y una estatura es de 1,92 metros. ¿ Podrá José montar en el juego mecánico?

Rta. Mostrar que NO puede montar

TRIGONOMÉTRICAS:

La trigonometría sirve para solucionar problemas en muchas áreas del saber. La Astronomía, la Física, la Geografía y otras se sirven de la trigonometría para resolver sus problemas.

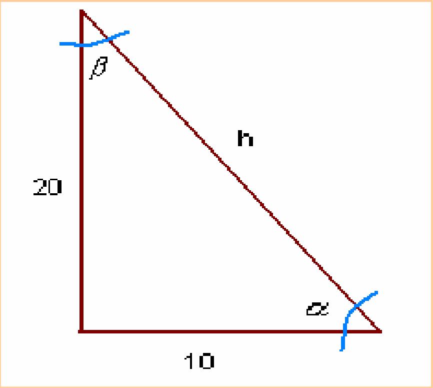
Las herramientas para trabajar problemas con trigonometría son conocer claramente el Teorema de Pitágoras, buenos principios de funciones trigonométricas, una calculadora científica para apresurar los cálculos; ojo NO para simplificarlos. Es pertinente que todos los cálculos se planteen metódicamente para comprender el problema y su solución sea la pertinente.

Ejemplo 1:

En un triángulo rectángulo el lado adyacente mide 10 cm. y el opuesto mide 20 cm. Hallar las medidas de los lados y de los ángulos.

Solución:

Una gráfica nos ayuda para la solución.



Para hallar el lado h es decir la hipotenusa, por le teorema de Pitágoras.

$h^2 = x^2 + y^2$

Reemplazando:

$h^2 = (20)^2 + (10)^2 = 400 + 100 = 500$

$h^2 = 500 \Rightarrow\Rightarrow h = \sqrt{500} = 22,36\, cm.$

Para hallar el ángulo α, por medio de la función seno se puede obtener:

$sen(\alpha) = \frac{y}{h} = \frac{20}{22,36} = 0,8945$

Para hallar el ángulo aplicamos función inversa:

$sen^{-1}[sen(\alpha)] = sen^{-1}(0,8945) \Rightarrow\Rightarrow \alpha = 63,44^0$

Para hallar el ángulo β se puede hacer de dos formas:

-) $sen(\beta) = \frac{10}{22,36} = 0,4472$ ó $\cos(\beta) = \frac{20}{22,36} = 0,8945$

Aplicando función inversa:

$sen^{-1}[sen(\beta)] = sen^{-1}(0,4472)$ ó $\cos^{-1}[\cos(\beta)] = \cos^{-1}(0,8945)$

$\beta = sen^{-1}(0,4472) = 26,56^0$ ó $\beta = \cos^{-1}(0,8945) = 26,55$

Vemos que el valor es semejante, ya que estamos midiendo en mismo ángulo.

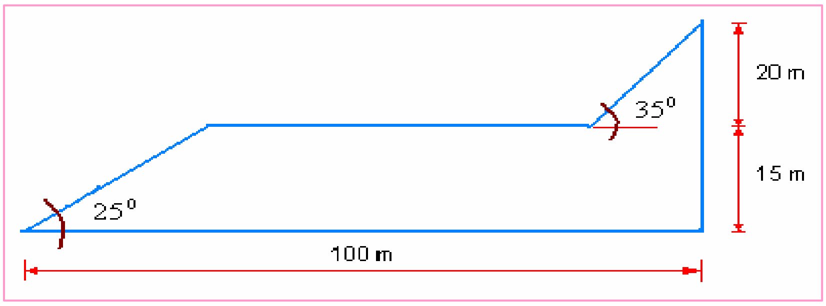
-) Como la suma de los ángulos internos de un triángulo debe ser 180 ^{0} entonces por diferencia:

$$90^0 + 63{,}44^0 + \beta = 180^0 \Rightarrow\Rightarrow \beta = 180^0 - (90^0 + 63{,}44^0) = 26{,}56^0$$

Los resultados son iguales.

Ejemplo 2:

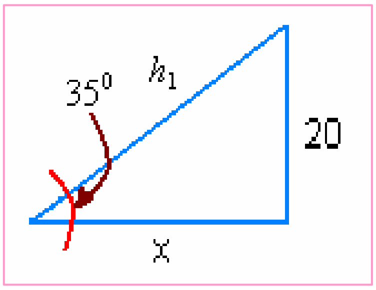
Se requiere diseñar un tobogán como lo muestra la grafica, calcular la longitud del tobogán según las especificaciones dadas.



Solución:

Dividamos el problema en 3 partes:

1.) La parte más alta.



Por la función seno:

$$sen(35^0) = \frac{20}{h_1} \Rightarrow\Rightarrow h_1 = \frac{20}{sen(35^0)} = \frac{20}{0{,}57357} = 34{,}87m$$

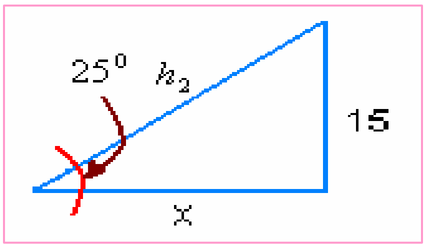
La longitud de la primera parte del tobogán es de 34,87 metros.

Ahora se debe determinar cuanto recorre en longitud horizontal, es decir cuanto vale x:

$$\cos(35^0) = \frac{x}{34{,}87} \Rightarrow\Rightarrow x = 34{,}87\cos(35^0) = 28{,}56\,m$$

Lo que se recorre en x_1 es de 28,56 metros.

2.) La parte más baja.



Por la función seno:

$$sen(25^0) = \frac{15}{h_2} \Rightarrow\Rightarrow h_2 = \frac{15}{sen(25^0)} = \frac{15}{0,4226} = 35,49\,m$$

La longitud de la tercera parte del tobogán es de 35,49 metros.

El recorrido en determinar cuanto recorre en longitud horizontal, es decir cuanto vale x:

$$\cos(25^0) = \frac{x}{35,49} \Rightarrow\Rightarrow x = 35,49\cos(25^0) = 32,165\ m$$

Lo que se recorre en x_2 es de 32,165 metros.

3.) El recorrido total del tobogán será las dos inclinaciones más la parte horizontal, para hallar la parte que recorre el tobogán horizontalmente (x_h), debemos restan los recorridos horizontales de la parte alta y baja al toral de la longitud horizontal:

$x_h = 100 - (28,56 + 32,165) = 39,275$

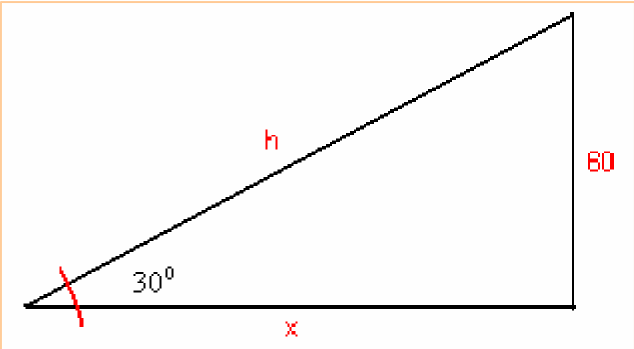
La longitud total del tobogán será: 34,87 + 35,49 + 39,275 = 109,635 metros

Ejemplo 3:

Un niño eleva una cometa que esta a 60 metros de altura y éste no puede soltar más cuerda. El ángulo que la cuerda hace con el piso es de 30^0 ¿Cuánta piola tenía el niño?

Solución:

Con un gráfico nos orientamos:



La pregunta es hallar h en la gráfica.

La función seno es adecuada para resolver el problema.

$$sen(\alpha) = \frac{y}{h}$$

Reemplazando:

$$sen(30^0) = \frac{60}{h} \Rightarrow\Rightarrow h = \frac{60}{sen(30^0)} = \frac{60}{1/2} = 120$$

El niño solo tenía 120 metros de piola para elevar la cometa.

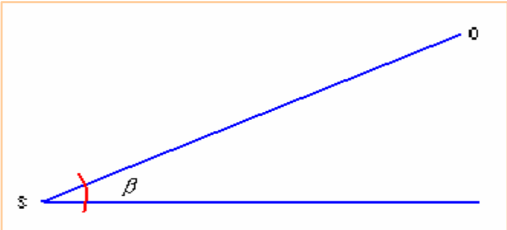
ANGULO DE ELEVACIÓN:

Cuando un observador ubicado en un punto dado, observa un objeto que esta a mayor altura que la visual de éste, el ángulo formado se le conoce como ángulo de elevación.

S = Observador

O = Objeto a observar

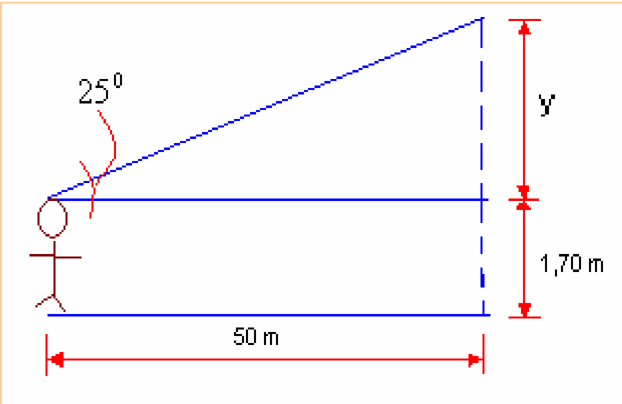
β = Angulo de elevación.



Ejemplo 4:

Un observador que tiene 1,70 metros de altura, esta a 50 metros de una iglesia, el ángulo de elevación a la punta de la torre de la iglesia es de 25^0 ¿Cuál será la altura de la iglesia?

Solución:



La incógnita es y. Primero calculamos la hipotenusa, por medio de la función coseno:

$$\cos(\beta) = \frac{x}{h}$$

Reemplazando:

$$\cos(\beta) = \frac{x}{h} \Rightarrow\Rightarrow \cos(25^0) = \frac{50}{h}$$

Despejamos h, entonces:

$$h = \frac{50}{\cos(25^0)} = \frac{50}{0{,}9063} = 55{,}17$$

Como ya conocemos h, ahora sí podemos hallar y:

$$sen(\beta) = \frac{y}{h} \Rightarrow\Rightarrow y = hsen(\beta)$$

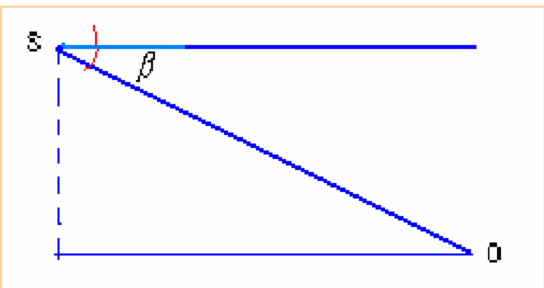
Reemplazando:

$$y = hsen(\beta) = 55{,}17 sen(25^0) = 55{,}17 x(0{,}4226) = 23{,}315$$

La altura de la iglesia es de 23,315 metros.

ANGULO DE DEPRESIÓN:

Es el formado por la visual y la horizontal, cuando el observador esta a mayor nivel que el objeto observado.



S = Observador

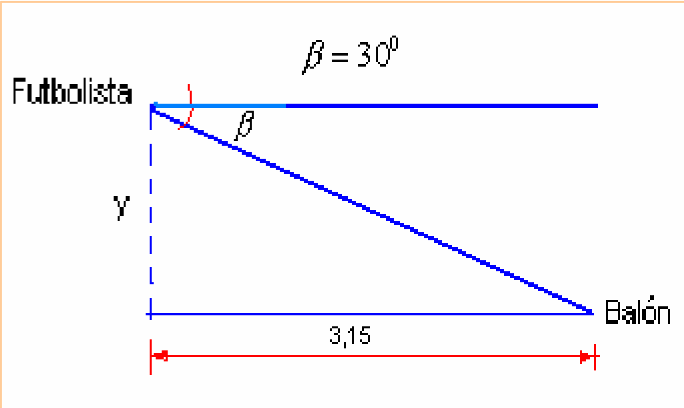
O = Objeto observado

β = Angulo de depresión

Ejemplo 5:

N futbolista esta a 3,15 metros del balón, el ángulo de depresión es de 30^0 ¿Cuál será la estatura del futbolista?

Solución:



y = Altura del futbolista.

Primero se debe hallar la hipotenusa, es decir la distancia entre el futbolista y el balón, lo que se puede hacer por función coseno.

$$\cos(\beta) = \frac{x}{h}$$

Reemplazando:

$$\cos(30^0) = \frac{3{,}15}{h} \Rightarrow\Rightarrow h = \frac{3{,}15}{\cos(30^0)} = 3{,}637$$

Para hallar la altura del futbolista, usando la función seno del ángulo, despejamos y:

$$sen(\beta) = \frac{y}{h} \Rightarrow\Rightarrow y = hsen(\beta) = 3{,}637sen(30^0) = 1{,}8185$$

El futbolista tiene una estatura de 1, 8185 metros.

EJERCICIOS

1. Un salvavidas esta en su torre de observación a 20 metros del altura. Una persona implora su ayuda con un ángulo de depresión de 35^0 ¿A qué distancia de la base de la torre esta la persona que solicita ayuda?

Rta: x = 28,56 metros

2. Un poste de 35 metros de altura debe ser apoyado por un alambre que lo fije a tierra. Si el alambre forma un ángulo de 52^0 con la horizontal. ¿Cuál será la longitud del alambre?

Rta: h = 44,42 metros

3. Una persona de 1,62 metros, proyecta su sombra de 1,15 metros a lo largo del suelo. ¿Cuál será el ángulo de elevación del sol sobre la sombra?

Rta: $\alpha = 54{,}63^0$

4. Un cohete se dispara y éste sube a un ángulo constante de 70^0 hasta llegar a una distancia de 12.000 metros. ¿Qué altitud alcanzo el cohete?

Rta: y = 11.276,31 metros

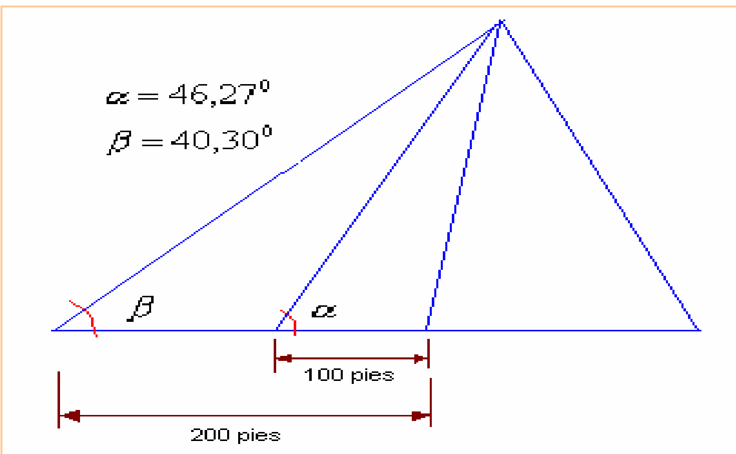
5. El pentágono de los EE. UU. Tiene forma de pentágono regular, cuyo lado mide 981 pies. ¿Cuál será el área del pentágono?

Rta: A = 1'459.379 pie^2

6. Un deslizadero forma un ángulo de 35^0 con la horizontal, si la distancia del punto donde llega el deslizadero en tierra a la horizontal donde inicia éste es de 100 metros, ¿Qué longitud tiene el deslizadero?

Rta: L = 70 metros

7. Una de las 7 maravillas del mundo es la pirámide de Keops, su altura original fue de 480 pies y 11 pulgadas. Pero con el tiempo ha presentado pérdida de piedra, así su altura ha disminuido, según la figura. ¿Cuál será la altura actual de la pirámide?



Rta: 449,36 pies.

CAPÍTULO DOS: TRIGONOMETRÍA ANALÍTICA

INTRODUCCIÓN

En el contexto que se va a trabajar, cuando se hable de *Trigonometría* se hace referencia a el análisis del triangulo.

Analizadas las funciones trigonométricas, es importante profundizar en éstas temáticas en la medida que son necesarias para afianzar los conocimientos en este campo, tales como las identidades y las ecuaciones trigonométricas, cuyos conocimientos fortalecerán las competencias cognitivas muy importantes en el campo de las Matemáticas, insumos para cursos posteriores y una herramienta para la vida profesional de Ingenieros, Administradores, Agrónomos, Zootecnistas y otros.

En primera instancia se estudiarán las identidades fundamentales, obtenidas a partir de los principios de la circunferencia unidad, haciendo las demostraciones básicas, dejando las demás como trabajo de investigación para que los estudiantes sean partícipes de su formación, esto es muy interesante. A partir de éstas, se desarrollarán identidades diversas. Posteriormente se trabajarán sobre unas identidades muy específicas llamadas ecuaciones trigonométricas, las cuales son muy importantes en el ámbito de la trigonometría y del mundo de las Matemáticas.

Una vez obtenida una buena profundización de las temáticas, el siguiente paso será la transferencia, la cual se presenta por medio de diversas aplicaciones en diferentes campos, a través de ejemplos modelos, los cuales dejan ver los alcances de la trigonometría. Es pertinente analizar cada ejemplo, su planteamiento y su solución, con el fin de poder llevar la misma estructura a diferentes contextos.

Objetivo General

Profundizar en los conceptos de Trigonometría Analítica, que permita adquirir los conocimientos necesarios para resolver problemas que requieran de estos principios.

Objetivos Específicos:

1. Analizar las identidades trigonométricas
2. Resolver identidades trigonométricas
3. Resolver ecuaciones trigonométricas
4. Analizar los triángulos no rectángulos y sus aplicaciones.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

$sen^2(x)+\cos^2(x)=1$

En trigonometría existen unas ecuaciones muy particulares a las cuales se le llama *identidades trigonométricas*, dichas ecuaciones tiene la particularidad que se satisfacen para cualquier ángulo. Dentro de este contexto se analizarán varias clases de identidades, las básicas, las de suma y diferencia, las de ángulo doble y las de ángulo mitrad.

IDENTIDADES BÁSICAS:

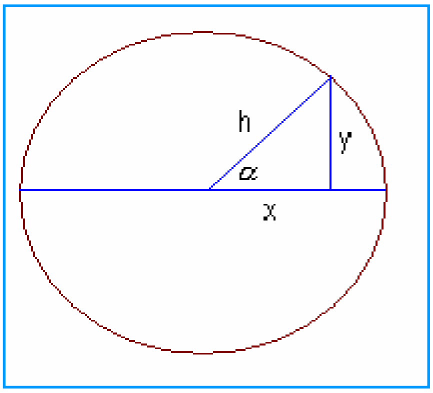
Dentro de las identidades básicas se presentan 6 categóricas, las cuales analizaremos a continuación:

1. **Identidad Fundamental:** Partiendo del teorema de Pitágoras, la relación de los lados del triángulo y el círculo trigonométrico, se puede obtener dicha identidad.

$$\boxed{sen^2(x)+\cos^2(x)=1}$$

Demostración:

A partir del círculo trigonométrico unitario.



h = 1. Se esta trabajando con la circunferencia unitaria. (r = 1)

Teorema de Pitágoras: $x^2+y^2=h^2$

Por definición de relación trigonométricas:

$$sen(\alpha)=\frac{y}{h}\Rightarrow\Rightarrow sen(\alpha)=y$$

$$\cos(\alpha)=\frac{x}{h}\Rightarrow\Rightarrow \cos(\alpha)=x$$

Si reemplazamos a *x* e *y* en la ecuación de Pitágoras tenemos:

$x^2+y^2=h^2\Rightarrow\Rightarrow sen^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1^2$

Finalmente: $sen^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$

2. **Identidades de Cociente:** Estas se obtienen por la definición de las relaciones trigonométricas

a-)

$$\boxed{\tan(\alpha)=\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$$

Demostración:

Se sabe que: $sen\,(\alpha) = \dfrac{y}{h}$ y $\cos(\alpha) = \dfrac{x}{h}$ Si dividimos sen (α) en cos(α) se obtiene: $\dfrac{y/h}{x/h} = \dfrac{y}{x}$ Por definición: $\dfrac{y}{x} = \tan(\alpha)$ Así: $\dfrac{sen\,(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$

b-)

$$\boxed{\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{sen\,(\alpha)}}$$

Demostración:

Con los mismos argumentos utilizados para la tangente, solo que en este caso el cociente es coseno sobre seno.
$\dfrac{x/h}{y/h} = \dfrac{x}{y}$ Por definición: $\dfrac{x}{y} = \cot(\alpha)$ Así $\dfrac{\cos(\alpha)}{sen\,(\alpha)} = \cot(\alpha)$

3. **Identidades Recíprocas:** Se les llama de esta manera debido a que a partir de la definición, al aplicar el recíproco, se obtiene nuevos cocientes.

a-)

$\boxed{sen\,(\alpha) = \dfrac{1}{\csc(\alpha)}}$ Recíprocamente $\boxed{\csc(\alpha) = \dfrac{1}{sen(\alpha)}}$

Demostración:

Como $sen(\alpha) = \dfrac{y}{h}$ Entonces aplicamos el reciproco: $\dfrac{1}{sen(\alpha)} = \dfrac{1}{y/h} \Rightarrow\Rightarrow \dfrac{1}{sen(\alpha)} = \dfrac{h}{y}$

Se sabe que $\csc(\alpha) = \dfrac{h}{y}$ Así las funciones seno y cosecante son recíprocas.

b-)

$\boxed{\cos(\alpha) = \dfrac{1}{\sec(\alpha)}}$ Recíprocamente $\boxed{\sec(\alpha) = \dfrac{1}{\cos(\alpha)}}$

Demostración:

Como ejercicio para realizar con el grupo colaborativo.

c-)

$\boxed{\tan(\alpha) = \dfrac{1}{\cot(\alpha)}}$ Recíprocamente $\boxed{\cot(\alpha) = \dfrac{1}{\tan(\alpha)}}$

Demostración:

Como ejercicio para trabajar con el grupo colaborativo y compartir con el Tutor.

4. **Identidades Pitagóricas:** a partir de la identidad fundamental y las identidades de cociente, se obtienen otras identidades llamadas pitagóricas. Aunque varios autores llaman a la identidad fundamental también pitagórica.

a-)

$$\boxed{\tan^2(\alpha)+1=\sec^2(\alpha)}$$

Demostración:

A partir de la identidad fundamental $sen^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$, dividimos toda la expresión por $\cos^2(\alpha)$, entonces:

$$\frac{sen^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}+\frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}=\frac{1}{\cos^2(\alpha)} \Rightarrow\Rightarrow \tan^2(\alpha)+1=\sec^2(\alpha)$$

b-)

$$\boxed{\cot^2(\alpha)+1=\csc^2(\alpha)}$$

Demostración:

De la fundamental, dividimos por $sen^2(\alpha)$, entonces:

$$\frac{sen^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)}+\frac{\cos^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)}=\frac{1}{sen^2(\alpha)} \Rightarrow\Rightarrow 1+\cot^2(\alpha)=\csc^2(\alpha)$$

5. **Identidades Pares - Impares:** Cuando se definió la simetría de las funciones trigonométricas, se hizo referencia a las funciones pares e impares, de este hecho se obtiene las funciones pares e impares.

Pares: $\boxed{\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)}$ y $\boxed{\sec(-\alpha)=\sec(\alpha)}$

Impares $\boxed{sen(-\alpha)=-sen(\alpha)}$ $\boxed{\tan(-\alpha)=-\tan(\alpha)}$

$\boxed{\cot(-\alpha)=-\cot(\alpha)}$ $\boxed{\csc(-\alpha)=-\csc(\alpha)}$

6. **Identidades de Cofunción:** Cuando a π/2 se le resta un ángulo cualquiera, se obtiene la cofunción respectiva.

a-)

$$sen(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos(\alpha)$$ $$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=sen(\alpha)$$

b-)

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot(\alpha)$$ $$\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan(\alpha)$$

7. **Identidades Inversas:** Cuando a π se le suma o resta un ángulo cualquiera, se obtiene la función pero con signo contrario, veamos los casos siguientes.

a-)

$$sen(\pi-\alpha)=sen(\alpha)$$ $$sen(\pi+\alpha)=-sen(\alpha)$$

b-)

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos(\alpha)$$ $$\cos(\pi+\alpha)=-\cos(\alpha)$$

c-)

$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan(\alpha)$$ $$\tan(\pi-\alpha)=Investigar$$

Las demostraciones se dejan como ejercicio de investigación.

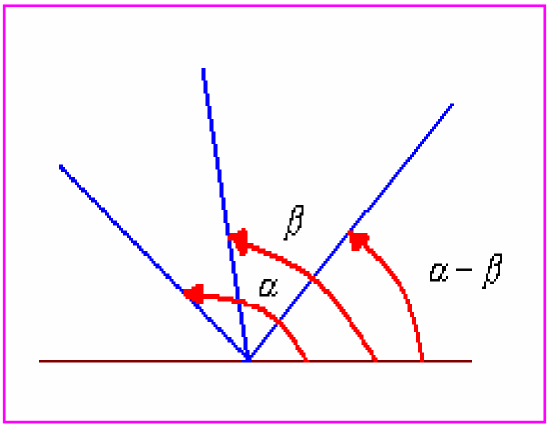
IDENTIDADES DE SUMA Y DIFERENCIA:

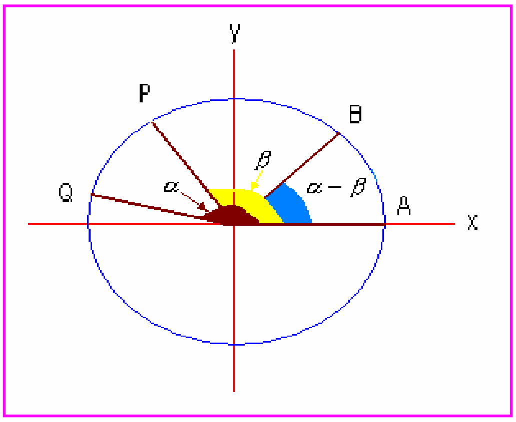
En muchas ocasiones, un ángulo dado se puede expresar como suma o diferencia de ángulo notables, por ejemplo 15^{0} se puede expresar como ($45^{0} - 30^{0}$), 75^{0} como ($30^{0} + 45^{0}$) y así con otros. Para este tipo de situaciones es donde se utilizan las identidades de suma y diferencia.

a-) $$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+sen(\alpha)sen(\beta)$$

Demostración:

Vamos a utilizar como herramienta la geometría del círculo trigonométrico unitario.





Identifiquemos las coordenadas de los puntos dados en la circunferencia unidad.

A = (x_0, y_0) = (1, 0)
B = (x_1, y_1) = (cos (α – β), sen (α – β))
P = (x_2, y_2) = (cos (β), sen (β))
Q = (x_3, y_3) = (cos (α), sen (α))

La distancia de AB es igual a la distancia PQ, entonces: d(AB) = d(PQ), así:
(B – A) = (Q – P)
Reemplazando, a partir del teorema de Pitágoras:

$$\sqrt{[x_1-x_0]^2+[y_1-y_0]^2}=\sqrt{[x_3-x_2]^2+[y_3-y_2]^2}$$

$$\sqrt{[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+[sen(\alpha-\beta)-0]^2}=\sqrt{[\cos(\alpha)-\cos(\beta)]^2+[sen(\alpha)-sen(\beta)]^2}$$

Elevando al cuadrado para eliminar raíz:

$$[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+[sen(\alpha-\beta)-0]^2=[\cos(\alpha)-\cos(\beta)]^2+[sen(\alpha)-sen(\beta)]^2$$

Desarrollando los productos notables:

$\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1+sen^2(\alpha-\beta)$ Es igual a:

$$\cos^2(\alpha)-2\cos(\alpha)\cos(\beta)+\cos^2(\beta)+sen^2(\alpha)-2sen(\alpha)sen(\beta)+sen^2(\beta)$$

Agrupando términos:

$$[\cos^2(\alpha-\beta)+sen^2(\alpha-\beta)]-2\cos(\alpha-\beta)+1=[\cos^2(\alpha)+sen^2(\alpha)]+[\cos^2(\beta)+sen^2(\beta)]$$
$$-2\cos(\alpha)\cos(\beta)-2sen(\alpha)sen(\beta)$$

Por la identidad fundamental:

$$1-2\cos(\alpha-\beta)+1=1+1-2\cos(\alpha)\cos(\beta)-2sen(\alpha)sen(\beta)$$

Operando:
$$2-2\cos(\alpha-\beta)=2-2\cos(\alpha)\cos(\beta)-2sen(\alpha)sen(\beta)$$

Simplificando:
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+sen(\alpha)sen(\beta)$$

Así queda la demostración de la diferencia de ángulos para coseno.

b-) $\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-sen(\alpha)sen(\beta)}$

Demostración:

A partir de la definición:
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos(\alpha)\cos(-\beta)+sen(\alpha)sen(-\beta)$$

Se sabe que: $\cos(-\beta)=\cos(\beta)$ y $sen(-\beta)=-sen(\beta)$

Entonces:
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos(\alpha)\cos(\beta)-sen(\alpha)sen(\beta)$$

c-) $\boxed{sen(\alpha+\beta)=sen(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)sen(\beta)}$

Demostración:

A partir de la identidad de diferencia de ángulos para coseno, las identidades de cofunción y algunas transformaciones sencillas.

Inicialmente: $w=(\alpha+\beta)$

Ahora por identidad de cofunción: $\cos(\pi/2-w)=sen(w)$

Por otro lado:
$$\cos(\pi/2-w)=\cos(\pi/2-(\alpha+\beta))=\cos(\pi/2-\alpha-\beta)=\cos\left[(\pi/2-\alpha)-\beta\right]$$

La última expresión la desarrollamos como una diferencia de ángulos:
$$\cos\left[(\pi/2-\alpha)-\beta\right]=\cos(\pi/2-\alpha)\cos(\beta)+sen(\pi/2-\alpha)sen(\beta)$$

Pero $\cos(\pi/2-\alpha)=sen(\alpha)$ y $sen(\pi/2-\alpha)=\cos(\alpha)$ Por identidades de cofunción. Sustituyendo en la expresión anterior:
$$\cos\left[(\pi/2-\alpha)-\beta\right]=sen(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)sen(\beta)$$

Como $\cos\left[(\pi/2-\alpha)-\beta\right]=\cos\left[\pi/2-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\pi/2-w\right]=sen(w)=sen(\alpha+\beta)$

Finalmente:
$sen(\alpha+\beta)=sen(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)sen(\beta)$

Así queda demostrada la identidad de suma de ángulos para seno.

d-) $\boxed{sen(\alpha-\beta)=sen(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)sen(\beta)}$

Demostración:

Por favor hacer la demostración con el pequeño grupo colaborativo y compartir con el Tutor. ¡Una idea¡ como se hizo para el caso b.

e-) $\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}}$

Demostración:

Por identidades de cociente:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{sen(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{sen(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)sen(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)-sen(\alpha)sen(\beta)}$$

Dividimos la expresión por $cso(\alpha)\cos(\beta)$, esto debido a que debemos llegar a tangente y se sabe que tangente es cociente entre seno y coseno. Entonces:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{sen(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)sen(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\dfrac{\cos(\alpha)\cos(\beta)-sen(\alpha)sen(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}=\frac{\dfrac{sen(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}+\dfrac{\cos(\alpha)sen(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\dfrac{\cos(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}-\dfrac{sen(\alpha)sen(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}$$

Utilizando identidades de cociente:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{sen(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}+\dfrac{\cos(\alpha)sen(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\dfrac{\cos(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}-\dfrac{sen(\alpha)sen(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Así queda demostrada la suma de ángulos para tangente.

f-) $\boxed{\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}}$

Demostración:

Con los mismos principios del caso anterior, hacer la demostración con el pequeño grupo colaborativo. Posteriormente compartir con le Tutor.

Ejemplo 1:

Determinar el valor de $sen(\pi/12)$

Solución:

El ángulo se puede descomponer en: $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$

Entonces: $sen(\pi/12) = sen(\pi/4 - \pi/6)$

Aplicando la identidad:

$$sen(\pi/4 - \pi/6) = sen(\pi/4)\cos(\pi/6) - \cos(\pi/4)sen(\pi/6) = \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{1}{2}$$

Operando:

$$sen(\pi/4 - \pi/6) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow\Rightarrow sen(\pi/12) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Ejemplo 2:

Calcular $\cos(75^0)$

Solución:

El ángulo propuesto se puede descomponer en dos ángulos notables al saber:

$\cos(75^0) = \cos(30^0 + 45^0)$

Por la identidad de suma de ángulos para coseno:

$$\cos(30^0 + 45^0) = \cos(30^0)\cos(45^0) - sen(30^0)sen(45^0) = \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Operando:

$$\cos(30^0 + 45^0) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Por consiguiente:

$$\cos(75^0) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Ejemplo 3:

Demostrar que $\tan(\pi + \theta) = \tan(\theta)$

Solución:

Por la identidad de suma para tangente:

$$\tan(\pi + \theta) = \frac{\tan(\pi) + \tan(\theta)}{1 - \tan(\pi)\tan(\theta)}$$

Pero sabemos que $\tan(\pi) = 0$ Reemplazamos:

$$\tan(\pi+\theta)=\frac{0+\tan(\theta)}{1-0*\tan(\theta)}=\frac{\tan(\theta)}{1-0}=\tan(\theta)$$

IDENTIDADES DE ÁNGULO DOBLE:

Cuando en la suma de ángulos, los dos ángulos son iguales, es decir: α = β, se obtiene los llamados ángulos dobles. Estos son una herramienta muy usada en el movimiento parabólico.

a-) $$\boxed{sen(2\beta)=2sen(\beta)\cos(\beta)}$$

Demostración:

Sabemos que $sen(\alpha+\beta)=sen(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)sen(\beta)$, pero como α = β

Entonces: $sen(\alpha+\alpha)=sen(\alpha)\cos(\alpha)+\cos(\alpha)sen(\alpha)=sen(\alpha)\cos(\alpha)+sen(\alpha)\cos(\alpha)$

Operando: $sen(\alpha+\alpha)=sen(\alpha)\cos(\alpha)+sen(\alpha)\cos(\alpha)=2sen(\alpha)\cos(\alpha)$

Finalmente: $sen(2\alpha)=2sen(\alpha)\cos(\alpha)$

b-) $$\boxed{\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-sen^2(\alpha)}$$

Demostración:

Siguiendo la misma metodología del caso anterior.
$\cos(2\alpha)=\cos(\alpha+\alpha)=\cos(\alpha)\cos(\alpha)-sen(\alpha)sen(\alpha)=cso^2(\alpha)-sen^2(\alpha)$
Así $\cos(2\alpha)=cso^2(\alpha)-sen^2(\alpha)$

c-) $$\boxed{\tan(2\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}}$$

Demostración:

Se deja para hacerlo en el grupo colaborativo y compartirlo con le Tutor.
Una idea, recordemos que tan (α)= sen (α)/cos (α)

IDENTIDADES DE ÁNGULO MITAD:

En ocasiones se presentan casos donde se requiere trabajar con ángulos mitad, luego es pertinente analizar identidades de éste tipo.

a-)

$$\boxed{sen(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}}$$

Demostración:

A partir de las identidades de ángulo doble podemos hacer estas demostraciones.

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)$$

Por la identidad fundamental: $\cos^2(\alpha) = 1 - sen^2(\alpha)$ Reemplazando:

$$\cos(2\alpha) = 1 - sen^2(\alpha) - sen^2(\alpha) = 1 - 2sen^2(\alpha)$$

Despejamos sen^2 (α), entonces:

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2sen^2(\alpha) \Rightarrow\Rightarrow sen^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$$

Hacemos un reemplazo de α por α / 2, entonces:

$$sen^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(2\frac{\alpha}{2})}{2} = \frac{1-\cos(\alpha)}{2}$$

Despejamos el seno, por consiguiente:

$$sen(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$$

b-)

$$\boxed{\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}}$$

Demostración:

Por favor hacerlo individualmente y luego compartirlo con los compañeros del grupo colaborativo, las dudas con le Tutor.

c-)

$$\boxed{\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{sen(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}}$$

Demostración:

Igual que en el caso anterior.

IDENTIDADES DE PRODUCTO - SUMA:

A continuación vamos a mostrar unas identidades que en ocasiones son requeridas, las demostraciones están en libros de Precálculo y de Matemáticas, sería pertinente que se investigaran como refuerzo a estas identidades.

a-)

$$sen(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left[sen(\alpha+\beta) + sen(\alpha-\beta)\right]$$

b-)

$$sen(\alpha)sen(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

c-)

$$\cos(\alpha)sen(\beta) = \frac{1}{2}\left[sen(\alpha+\beta) - sen(\alpha-\beta)\right]$$

d-)

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

IDENTIDADES DE SUMA - PRODUCTO:

También en ocasiones son requeridas las identidades de suma – producto. Las demostraciones es pertinente que se investigaran como refuerzo a esta temática.

a-)

$$sen(\alpha) + sen(\beta) = 2sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

b-)

$$sen(\alpha) - sen(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

c-)

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

d-)

$$\cos(\alpha)-\cos(\beta)=-2sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

DESARROLLO DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Al inicio de este capítulo se hizo el análisis de las identidades básicas, identidades de suma y diferencia, identidades de ángulo doble, identidades de ángulo mitad, identidades de suma-producto e identidades de producto – suma. Con estos insumos y los principios matemáticos conocidos, podemos entrar a desarrollar demostraciones de identidades trigonométricas.

Una identidad trigonométrica es una ecuación, entonces demostrar una identidad es precisamente demostrar la igualdad. El proceso se puede desarrollar de tres maneras.

Asumiendo que la generalización de una identidad es de la forma *a = b*

1. A partir del primer término *a* llegar a el segundo *b* por medio de procedimientos matemáticos adecuados.
2. A partir del segundo término *b* llegar al primero *a,* también utilizando métodos matemáticos adecuados.
3. Haciendo transformaciones simultáneamente a los dos términos de la igualdad para llegar a una equivalencia.
   Se parte de *a = b,* se hacer transformaciones adecuadas hasta llegar a por ejemplo *p = p*

No existe una regla o norma para saber cual método elegir, pero por experiencia y facilidad es aconsejable utilizar la técnica 1 o la 2, donde se toma el término más complejo para llegar al más sencillo, ya que es más fácil simplificar que amplificar.

Ejemplo 1:

Expresar como solo función de cos(x) la siguiente fracción: $\dfrac{sen^3(x)}{\tan^2(x)}$

Solución:

Lo que se debe hacer es utilizando las identidades básicas y haciendo las transformaciones pertinentes llegar a obtener solo cos(x), veamos:

$$\frac{sen^3(x)}{\tan^2(x)}=\frac{sen^2(x)sen(x)}{sen^2(x)/\cos^2(x)}=\frac{\cos^2(x)\left[sen^2(x)sen(x)\right]}{sen^2(x)}=\cos^2(x)sen(x)$$

Finalmente: $\cos^2(x)sen(x) = \cos^2(x)\sqrt{1-\cos^2(x)}$

Ejemplo 2:

Reducir la siguiente expresión en términos de la función seno.

$$\frac{\tan(x)+\sec(x)\tan(x)}{1+\sec(x)}$$

Solución:

Al igual que el ejemplo 1, haciendo las transformaciones adecuadas a la expresión inicial, con las identidades básicas y los principios aritméticos sobre fracciones, llega a una expresión que solo tenga sen(x), veamos:

$$\frac{\tan(x)+\sec(x)\tan(x)}{1+\sec(x)} = \frac{\frac{sen(x)}{\cos(x)}+\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)\left(\frac{sen(x)}{\cos(x)}\right)}{1+\frac{1}{\cos(x)}} = \frac{\frac{sen(x)}{\cos(x)}+\frac{sen(x)}{\cos^2(x)}}{\frac{(\cos(x)+1)}{\cos(x)}}$$

Sumando las fracciones del numerador y dejando una fracción en numerador y denominador, para aplicar producto de extremos y medios.

$$\frac{\frac{sen(x)}{\cos(x)}+\frac{sen(x)}{\cos^2(x)}}{\frac{(\cos(x)+1)}{\cos(x)}} = \frac{\frac{\cos^2(x)sen(x)+sen(x)\cos(x)}{\cos(x)\cos^2(x)}}{\frac{\cos(x)+1}{\cos(x)}} = \frac{\cos(x)\left[\cos^2(x)sen(x)+sen(x)\cos(x)\right]}{(\cos(x)+1)(\cos(x)\cos^2(x))}$$

Simplificando cos(x) y factorizando lo obtenido, resulta:

$$\frac{\left[\cos^2(x)sen(x)+sen(x)\cos(x)\right]}{(\cos(x)+1)(\cos^2(x))} = \frac{\cos(x)\left[\cos(x)sen(x)+sen(x)\right]}{(\cos(x)+1)(\cos^2(x))} = \frac{\left[\cos(x)sen(x)+sen(x)\right]}{(\cos(x)+1)(\cos(x))}$$

$$\frac{sen(x)\left[\cos(x)+1\right]}{(\cos(x)+1)(\cos(x))} = \frac{sen(x)}{\cos(x)} = \frac{sen(x)}{\sqrt{1-sen^2(x)}}$$

La expresión inicial quedo solo como función sen(x).

Ejemplo 3:

Demostrar que: $\dfrac{\tan(x)}{\sec(x)} = sen(x)$

Solución:

Por la expresión dada, es más pertinente partir del primer término y llegar al segundo.

$$\frac{\tan(x)}{\sec(x)} = \frac{\frac{sen(x)}{\cos(x)}}{\frac{1}{\cos(x)}} = \frac{sen(x)\cos(x)}{\cos(x)} = sen(x)$$

Así queda demostrada dicha identidad.

Ejemplo 4:

Demostrar la siguiente identidad. $\cos(x)[\sec(x)-\cos(x)] = sen^2(x)$

Solución:

Según la identidad planteada, es más pertinente partir de la primera expresión para llegar a la segunda, es decir, el método 1.

$$\cos(x)[\sec(x)-\cos(x)] = \cos(x)\left[\frac{1}{\cos(x)}-\cos(x)\right] = \cos(x)\left[\frac{1-\cos^2(x)}{\cos(x)}\right]$$

Simplificando y por la identidad fundamental:

$$\cos(x)\left[\frac{1-\cos^2(x)}{\cos(x)}\right] = 1-\cos^2(x) = sen^2(x)$$

Como se puede ver, el proceso es tal que se puede comprender cada paso, por favor analizarlo, según los principios sobre identidades estudiados.

Ejemplo 5:

Demostrar la identidad $\dfrac{\cos(x)}{1-sen(x)} = \dfrac{1+sen(x)}{\cos(x)}$

Solución:

Se observa que las dos partes son muy parecidas en la cantidad de términos que presenta, luego se puede partir de cualquiera de ellas. Para nuestro caso, partimos de la primera para llegar a la segunda parte.

Aplicamos la conjugada al denominador, operamos y aplicamos al identidad fundamental..

$$\frac{\cos(x)}{1-sen(x)} = \frac{\cos(x)(1+sen(x))}{(1-sen(x))(1+sen(x))} = \frac{\cos(x)(1+sen(x))}{1-sen^2(x)} = \frac{\cos(x)(1+sen(x))}{\cos^2(x)}$$

Simplificamos:

$$\frac{\cos(x)(1+sen(x))}{\cos^2(x)} = \frac{1+sen(x)}{\cos(x)}$$

Esta última expresión es la segunda parte de la igualdad inicial, así queda demostrada dicha identidad.

Ejemplo 6:

Demostrar la identidad:

$$[\tan(x)-\sec(x)]^2 = \frac{1-sen(x)}{1+\cos(x)}$$

Solución:

Para demostrar esta identidad tomemos la tercera opción; es decir, partir de las dos partes y llegar a una equivalencia.

$$[\tan(x) - \sec(x)]^2 \qquad \frac{1 - sen(x)}{1 + \cos(x)}$$

Desarrollamos el producto notable en la primera parte y aplicamos la conjugada en la segunda parte:

$$\tan^2(x) - 2\tan(x)\sec(x) + \sec^2(x) \quad \wedge \quad \frac{(1 - sen(x))(1 - sen(x))}{(1 + sen(x))(1 - sen(x))}$$

En la primera parte aplicamos identidades de cociente y en la segunda desarrollamos los productos.

$$\frac{sen^2(x)}{\cos^2(x)} - 2\frac{sen(x)}{\cos(x)}\frac{1}{\cos(x)} + \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \wedge \quad \frac{1 - sen(x) - sen(x) + sen^2(x)}{1 - sen^2(x)}$$

En la primera parte multiplicamos el segundo término y en la segunda parte sumamos los términos dos y tres.

$$\frac{sen^2(x)}{\cos^2(x)} - 2\frac{sen(x)}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \wedge \quad \frac{1 - 2sen(x) + sen^2(x)}{1 - sen^2(x)}$$

En la primera parte sumamos los términos y en la segunda parte organizamos el numerador y aplicamos identidad fundamental al denominador.

$$\frac{sen^2(x) - 2sen(x) + 1}{\cos^2(x)} \quad \wedge \quad \frac{sen^2(x) - 2sen(x) + 1}{\cos^2(x)}$$

Este último resultado, nos muestra una igualdad, luego así queda demostrada la identidad dada.

Ejemplo 7:

Demostrar la identidad: $\dfrac{\cos^3(x) - sen^3(x)}{\cos(x) - sen(x)} = 1 + \sqrt{sen^2(x) - sen^4(x)}$

Solución:

Es pertinente tomar el primero para llegar al segundo. Inicialmente desarrollamos la diferencia de cubos.

$$\frac{\cos^3(x) - sen^3(x)}{\cos(x) - sen(x)} = \frac{(\cos(x) - sen(x))\left(\cos^2(x) + \cos(x)sen(x) + sen^2(x)\right)}{\cos(x) - sen(x)}$$

Simplificando, reorganizando términos y aplicamos la identidad fundamental.

$$\left(\cos^2(x) + sen^2(x)\cos(x)sen(x)\right) = 1 + \cos(x)sen(x)$$

Convertimos coseno como seno, por la identidad fundamental:

$$1 + \cos(x)sen(x) = 1 + sen(x)\sqrt{1 - sen^2(x)} = 1 + \sqrt{sen^2(x)(1 - sen^2(x))}$$

Finalmente:

$$1+\sqrt{sen^2(x)(1-sen^2(x))}=1+\sqrt{sen^2(x)-sen^4(x)}$$

Así queda demostrada la identidad.

NOTA:

Para demostrar identidades, se requiere algunos principios, como conocer las identidades básicas, las de suma y producto, las de ángulos dobles y ángulos mitad, otras. Algo de ingenio para saber de donde partir y a donde llegar. Lo más importante hacer muchos ejercicios que permita adquirir experiencia y práctica en este tipo de demostraciones. Como se dice en el lenguaje matemático popular *Pedalear*, *pedalear* y *pedale*ar,… haciendo referencia que pedaleando se llega a la meta.

EJERCICIOS

Reducir a la función trigonométrica propuesta los siguientes ejercicios.

1. $\dfrac{\tan(x)+\sec(x)\tan(x)}{1+\sec(x)}$ En función solo de sen(x)

2. $\dfrac{\csc^2(x)-1}{\cot^2(x)}$ En función solo de cos(x)

3. $\dfrac{\tan(A)+\cot(A)}{\csc(A)}$ En función solo de sec(A)

4. $\dfrac{sen(x)}{1+\cos(x)}+\dfrac{1+\cos(x)}{sen(x)}$ En función solo de css(x)

Demostrar las siguientes identidades trigonométricas.

5. $\dfrac{sen(\pi/2-x)}{1-sen(x)}-\sec(x)=\tan(x)$

6. $[sen(\theta)+\cos(\theta)]^2+[sen(\theta)-\cos(\theta)]^2=2$

7. $sen(\beta+\pi)=-sen(\beta)$

8. $\tan(x+\pi/4)=\dfrac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}$

9. $\dfrac{sen^4(x)-\cos^4(x)}{1-2\cos^2(x)}=1$

10. $\cos(t-\pi/4)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos(t)+sen(t))$

11. $\dfrac{\cos(7x)+\cos(x)}{sen(7x)+sen(x)}=\cot(4t)$

12. $\dfrac{\tan(x-y)}{\tan(x+y)}=\dfrac{sen(2x)-sen(2y)}{sen(2x)+sen(2y)}$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Anteriormente se decía que las identidades trigonométricas son igualdades que se cumple para cualquier ángulo. Existen ciertas identidades que se cumplen para ángulos específicos, a dichas identidades se les llama ecuaciones trigonométricas.

> DEFINICIÓN:
>
> Las ecuaciones trigonométricas, son identidades que satisfacen solo ciertos ángulos. La solución se expresa en medidas de ángulos, puede ser en grados o radianes.

La resolución de ecuaciones trigonométricas requiere de un buen manejo de las funciones trigonométricas inversas; además, de los principios de álgebra y trigonometría.

Para que la ecuación sea más fácil de desarrollar, es pertinente reducir toda la expresión a una sola función, generalmente seno o coseno, para que se pueda obtener el ángulo o los ángulos solución.

Es importante aclarar que si no se dice otra cosa, la solución para nuestro caso se dará solo para la circunferencia unidad: $0 \leq x \leq 2\pi$. Algunos autores acostumbrar a dar al solución general, recordemos que las funciones trigonométricas son periódicas, ay que se repiten cada p intervalo.

Ejemplo 1:

Resolver: $sen(x) = \frac{1}{2}$

Solución:

El proceso en general consiste en despejar el ángulo. Para el caso que nos proponen, aplicando la función inversa del seno queda resuelto el problema.

$$sen(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow\Rightarrow sen^{-1}(sen(x)) = sen^{-1}(1/2) \Rightarrow\Rightarrow x = sen^{-1}(1/2)$$

El siguiente paso es identificar en donde el seno vale ½, para los cuadrantes positivos, ya que el valor es positivo. Se sabe que el seno vale ½ en 30^0 para el primer cuadrante y 150^0 para el segundo cuadrante. Recordemos que el seno es positivo en I Y II cuadrantes.

Solución: $x = 30^0$ y 150^0

Ejemplo 2:

Resolver: $\cos(x) = -\frac{1}{2}$

Solución:

Como la expresión esta en función solo de coseno, se puede despejar, aplicando la inversa de coseno.

$$\cos(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow\Rightarrow \cos^{-1}(\cos(x)) = \cos^{-1}(-\frac{1}{2}) \Rightarrow\Rightarrow x = \cos^{-1}(-\frac{1}{2})$$

Debemos identificar en donde el coseno vale -1/2. El coseno es negativo en los cuadrantes II y III, luego en dichos cuadrantes debe estar la solución.

Recordemos que cos (120^0) = -1/2 y cos (240^0) = -1/2. Por consiguiente:

x = 120^0 y 240^0 (2π/3 y 4π/3)

Ejemplo 3:

Resolver la siguiente ecuación: $sen(x) - \cos(x) = 0$

Solución:

Expresemos la ecuación en función solo de coseno:

$$sen(x) - \cos(x) = 0 \Rightarrow\Rightarrow sen(x) = \cos(x) \Rightarrow\Rightarrow sen(x) = \sqrt{1 - sen^2(x)}$$

Elevando al cuadrado toda la ecuación y operando términos semejantes:

$$sen^2(x) = 1 - sen^2(x) \Rightarrow\Rightarrow sen^2(x) + sen^2(x) = 1 \Rightarrow\Rightarrow 2sen^2(x) = 1$$

Despejamos sen(x):

$$2sen^2(x) = 1 \Rightarrow\Rightarrow sen^2(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow\Rightarrow sen(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow\Rightarrow sen(x) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vemos que tenemos valores positivos y negativos, luego habrá solución en los cuatro cuadrantes.

$$sen(x) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow\Rightarrow sen^{-1}(sen(x)) = sen^{-1}(\pm\frac{\sqrt{2}}{2})$$

Se sabe que el seno vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$ en 45^0, luego se debe proyectar a los demás cuadrantes.

Solución: x = 45^0, 135^0, 225^0, 315^0 (π/4, 3 π/4, 5 π/4, 7 π/4)

Ejemplo 4:

Hallar la solución de la ecuación: $\tan^5(x) - 9\tan(x) = 0$

Solución:

Inicialmente factorizamos: $\tan(x)\left[\tan^4(x) - 9\right] = 0$

Por la ley del producto nulo: $\tan(x) = 0$ o $[\tan^4(x) - 9] = 0$
Para el caso $\tan(x) = 0$: $\tan^{-1}(\tan(x)) = \tan^{-1}(0) \Rightarrow\Rightarrow x = \tan^{-1}(0)$

En la circunferencia unidad la tangente vale 0 en 0, π, 2 π.

Para el caso $[\tan^4(x) - 9] = 0 \Rightarrow\Rightarrow \tan^4(x) = 9 \Rightarrow\Rightarrow \tan^2(x) = \pm 3$
$\tan^2(x) = \pm 3 \Rightarrow\Rightarrow \tan(x) = \pm\sqrt{3}$

La tangente vale $\sqrt{3}$ en π / 3, pero como presenta signo + y -, habrá 4 ángulos de solución.
Para $+\sqrt{3}$: x = π / 3, 7π / 6
Para $-\sqrt{3}$: x = 2π / 3, 5π / 3
Solución: x = 0, π / 3, π, 7π / 6, 2π / 3, 5π / 3, 2 π

Ejemplo 5:

Resolver la ecuación: $\sec(x) - \tan(x) = \cos(x)$

Solución:

Primero debemos hacer las transformaciones necesarias para expresar la ecuación como una sola función, para este caso escogemos sen(x).

$$\sec(x) - \tan(x) = \cos(x) = \frac{1}{\cos(x)} - \frac{sen(x)}{\cos(x)} = \cos(x) \Rightarrow\Rightarrow \frac{1 - sen(x)}{\cos(x)} = \cos(x)$$

Operando la última fracción y aplicando identidad fundamental.
$$1 - sen(x) = \cos^2(x) \Rightarrow\Rightarrow 1 - sen(x) = 1 - sen^2(x) \Rightarrow\Rightarrow sen^2(x) - sen(x) = 0$$

Se factoriza la última expresión.
$$sen(x)[sen(x) - 1] = 0$$

Por la regla del producto nulo:
- $sen(x) = 0 \Rightarrow\Rightarrow sen^{-1}(sen(x)) = sen^{-1}(0) \Rightarrow\Rightarrow x = sen^{-1}(0)$

El seno vale 0 en: 0, π y 2π
- $[sen(x) - 1] = 0 \Rightarrow\Rightarrow sen(x) = 1 \Rightarrow\Rightarrow sen^{-1}(sen(x)) = sen^{-1}(1) \Rightarrow\Rightarrow x = sen^{-1}(1)$

El seno vale 1 en: π / 2. Esta solución se rechaza ¿POR QUÉ?

La solución es: 0, π y 2π

Ejemplo 6:

Resolver la ecuación: $\cos^2(2x) - sen^2(2x) = 0$

Solución:

Como se ha dicho se debe expresar como una sola función, veamos:

$$\cos^2(2x) = sen^2(2x) \Rightarrow\Rightarrow \frac{\cos^2(2x)}{\cos^2(2x)} = \frac{sen^2(2x)}{\cos^2(2x)} \Rightarrow\Rightarrow 1 = \tan^2(2x)$$

¿Que operaciones se hicieron en el paso anterior?, por favor analizarlas e interpretarlas.

$$1 = \tan^2(2x) \Rightarrow\Rightarrow \tan(2x) = \pm 1$$

Utilizando identidades de ángulo doble para la tangente.

$$\tan(2x) = \pm 1 \Rightarrow\Rightarrow \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)} = \pm 1$$

Reorganizando la última expresión.

$$\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)} = \pm 1 \Rightarrow\Rightarrow 2\tan(x) = 1-\tan^2(x) \Rightarrow\Rightarrow \tan^2(x) + 2\tan(x) - 1 = 0$$

Por la cuadrática:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Así:

$x_1 = -1+\sqrt{2}$ y $x_2 = -1-\sqrt{2}$

Entonces:

$$x_1 = \tan^{-1}(-1+\sqrt{2}) = 22{,}5^0 = \frac{\pi}{8}$$

En el primer cuadrante, pero la tangente también es positiva en el tercer cuadrante, luego: $x = 180^0 + 22{,}5^0 = 202{,}5^0 = \frac{9}{8}\pi$

$x_2 = \tan^{-1}(-1-\sqrt{2}) = -67{,}5^0$ equivalente en ángulo positivo a $292{,}5^0 = \frac{13}{8}\pi$

En el cuarto cuadrante, pero la tangente también es negativa en el segundo cuadrante, luego: $x = 180^0 - 67{,}5^0 = 112{,}5^0 = \frac{5}{8}\pi$

Solución total: $x = \frac{\pi}{8}, \frac{5}{8}\pi, \frac{9}{8}\pi, \frac{13}{8}\pi$

Estimado estudiante, por favor analizar este ejemplo y hacer sus propias conclusiones.

Los invitamos a que resuelvan los ejercicios propuestos y todos los que puedan desarrollar, esto les ayudará a enriquecer esta temática tan interesante.

EJERCICIOS

Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas para la circunferencia unidad. Por favor hacer todo el procedimiento.

1. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Rta: $x = 30^0, \quad 330^0$

2. $sen^2(x) - 1 = 0$ Rta: $x = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3}{2}\pi$

3. $\sec(\theta) - \frac{2}{3}\sqrt{3} = 0$ Rta: $\theta = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{11}{6}\pi$

4. $\cos(4\theta) = sen(2\theta)$ Rta: $\theta = 15^0, \quad 75^0, \quad 135^0$

5. $\tan^2(\alpha) + \tan(\alpha) = 0$ Rta: $\alpha = \frac{3}{4}\pi, \quad \pi$

6. $2sen^2(x) + sen(x) - 1 = 0$ Rta: $x = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5}{6}\pi, \quad \frac{3}{2}\pi$

7. $sen(3x) + sen(5x) = 0$ Rta:

$x = 0, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi, \pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi$

8. $2sen\left(\frac{3}{2}\theta\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = sen(\theta)$ Rta: $\theta = 0^0 \quad 90^0 \quad 180^0 \quad 270^0$

9. $\sqrt{\frac{1 + 2\cos(x)}{2}} = 1$ Rta: $x = \frac{\pi}{3}, \quad \frac{4}{3}\pi$

10. $2sen(\alpha) + 3\sqrt{sen(\alpha)} = 0$ Rta: $\alpha = \pi$

ANÁLISIS DE TRIÁNGULO NO RECTÁNGULOS:

En los apartes anteriores se han analizado situaciones de los triángulos rectángulos, pero existen diversos fenómenos que no siguen este patrón, la base de un telescopio del observatorio internacional, las velas de un barco, las caras de las pirámides de Egipto, no tienen forma de triángulos rectángulos, sabemos que a este tipo de triángulo se les llama "Triángulos No Rectángulos".

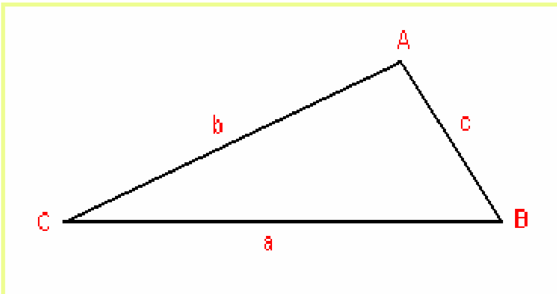
FUENTE:www.cienciateca.com/pyramids.jpg&imgrefurl=http: FUENTE: http://www.bbo.arrakis.es/geom/trian3.htm

EL trabajo que se desarrollará en este aparte es el análisis de triángulos no rectángulo. El soporte del estudio esta en los llamados teoremas de seno y coseno, los cuales permiten determinar los lados y ángulos de triángulos no rectángulos.

TEOREMA DE SENO:

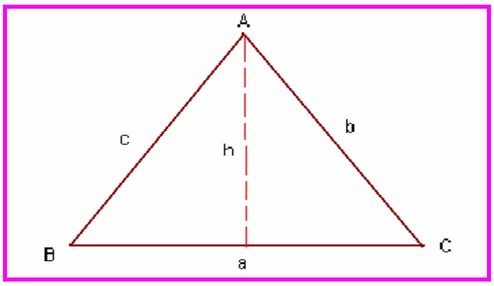
Para un triángulo con lados a, b, c y ángulos opuestos A; B, C. respectivamente, se cumple:

$$\boxed{\frac{sen\,(A)}{a} = \frac{sen\,(B)}{b} = \frac{sen\,(C)}{c}}$$



Demostración:

La demostración la vamos a hacer para un triángulo acutángulo, pero se cumple para cualquier triángulo.



Según la grafica:

$$sen(B) = \frac{h}{c} \Rightarrow\Rightarrow h = csen(B)$$

$$sen(C) = \frac{h}{b} \Rightarrow\Rightarrow h = bsen(C)$$

Como h es igual para los dos casos, se igualan:

$$csen(B) = bsen(C) \Rightarrow\Rightarrow \frac{sen(B)}{b} = \frac{sen(C)}{c}$$

Similarmente se puede probar que:

$$\frac{sen(A)}{a} = \frac{sen(B)}{b}$$

Por consiguiente:

$$\frac{sen(A)}{a} = \frac{sen(B)}{b} = \frac{sen(C)}{c}$$

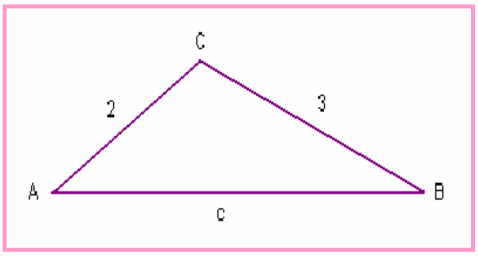
De esta manera se puede hallar los lados y ángulos de cualquier triángulo, pero esta metodología es pertinente para triángulos no rectángulos.

En este contexto se pueden encontrar varios casos:

-) LAA ó ALA: Conocer un lado y dos ángulos
-) LLA: Conocer dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos
-) LLL: Conocer los tres lados.

Ejemplo 1:

Para el triángulo que se presenta en la gráfica, hallar todos los lados y ángulos de la misma.
A = 40^0



Solución:

Se trata de un caso LLA, entonces:

$$\frac{sen(A)}{a} = \frac{sen(B)}{b} \Rightarrow\Rightarrow \frac{sen(40^0)}{3} = \frac{sen(B)}{2} \Rightarrow\Rightarrow sen(B) = \frac{2sen(40^0)}{3}$$

Desarrollando:

$$sen(B) = \frac{2(0{,}6427)}{3} = 0{,}4284$$

Para hallar el ángulo, aplicamos función inversa de seno:

$$sen^{-1}(sen(B)) = sen^{-1}(0{,}4284) \Rightarrow\Rightarrow B = sen^{-1}(0{,}4284) = 25{,}36^0$$

Para hallar el ángulo C, por el teorema de la suma de ángulos para un triángulo:

$$A + B + C = 180^0 \Rightarrow\Rightarrow 40^0 + 25{,}36^0 + C = 180^0 \Rightarrow\Rightarrow 65{,}36 + C = 180^0$$

Despejando: C = $114{,}64^0$

En seguida podemos hallar el lado c:

$$\frac{sen(C)}{c}=\frac{sen(A)}{3}\Rightarrow\Rightarrow\frac{sen(114{,}64^0)}{c}=\frac{sen(40^0)}{3}\Rightarrow\Rightarrow c=\frac{3sen(114{,}64^0)}{sen(40^0)}$$

Resolviendo:

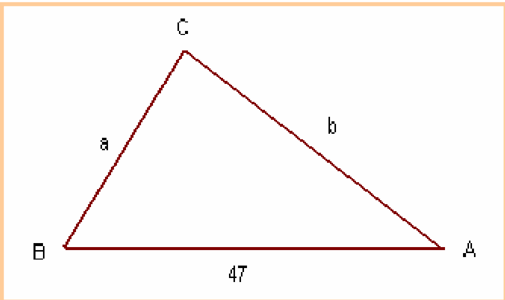
$$c=\frac{3(0{,}9089)}{0{,}6427}=4{,}24$$

Es obvio que la longitud de *c* debe ser mayor que la de *a* y la de *b*.

Ejemplo 2:

En un triángulo dos de sus ángulos miden 48^0 y 57^0, el lado que esta entre ellos mide 47 cm. Hallar los lados restantes.

Solución:



Según el problema:

$A = 57^0$ y $B = 48^0$

El problema es de tipo LAA o ALA

Primero hallemos C:
$C = 180^0 – (57^0 + 48^0) = 75^0$

$$\frac{sen(A)}{a}=\frac{sen(C)}{c}\Rightarrow\Rightarrow a=\frac{csen(A)}{sen(C)}=\frac{csen(57^0)}{sen(75^0)}=\frac{47x0{,}8386}{0{,}966}=40{,}80$$

Para hallar el lado b:

$$\frac{sen(B)}{b}=\frac{sen(C)}{c}\Rightarrow\Rightarrow b=\frac{csen(B)}{sen(C)}=\frac{47xsen(48^0)}{sen(75^0)}=\frac{34{,}427}{0{,}966}=36{,}16$$

Así, los lados miden: b = 36,16 cm. y a = 40,80 cm.

Más adelante en los problemas de aplicación se refuerza esta tema sobre teorema de seno.

TEOREMA DE COSENO:

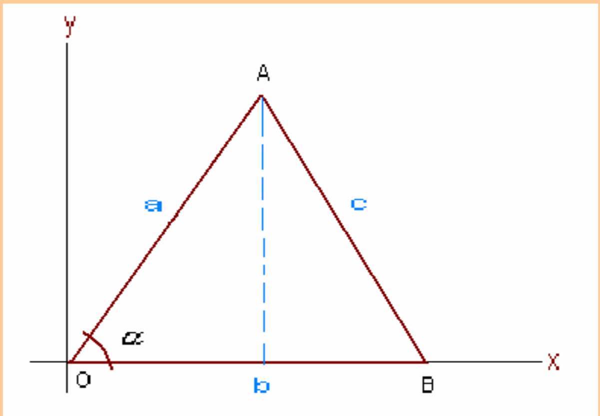
Existen situaciones donde el teorema de seno no se puede aplicar de manera directa, en casos como tener dos lados y el ángulo entre ellos o tener los tres lados. Para estos casos y otros, la solución es el teorema del coseno.

Para un triángulo con lados a, b, c y ángulos opuestos A; B, C. respectivamente, se cumple:

$$
\boxed{\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\
c^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos C
\end{aligned}}
$$

Demostración:

La demostración se hará con un triángulo obtusángulo, pero la situación se cumple para cualquier triángulo.



0 (0, 0)

B = (x_2, y_2) = (b, 0)

A (x_1, y_1) = (acos(α), asen(α))

Por medio de la distancia euclidia se puede hallar la magnitud de c.

Distancia Euclidia:

$c^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

Para el caso del triángulo que tenemos:

$$c^2 = (b - a\cos(\alpha))^2 + (0 - asen(\alpha))^2$$

Desarrollando los productos notables:

$$c^2 = b^2 - 2ab\cos(\alpha) + a^2\cos^2(\alpha) + a^2 sen^2(\alpha)$$

Factorizando y agrupando términos:

$$c^2 = a^2(\cos^2(\alpha) + a^2 sen^2(\alpha)) + b^2 - 2ab\cos(\alpha)$$

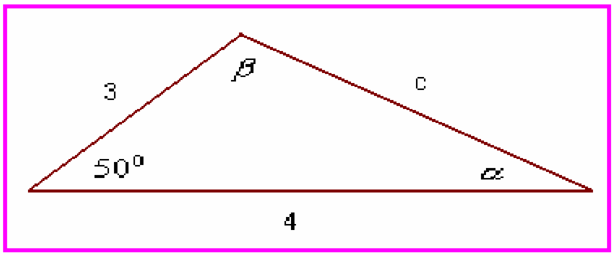
Aplicando la identidad fundamental.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha)$$

Así queda demostrado para *c,* de manera similar se puede hacer para *a* y *b*. El estudiante en el grupo colaborativo debe hacer la demostración para *a* y *b*, con los mismos argumentos expuestos para *c*, compartiendo con el Tutor dichas demostraciones.

Ejemplo 1:

Del triángulo expuesto a continuación, determinar sus lados y ángulos.



Solución:

Aplicando la ecuación del teorema para coseno.
Asumiendo que: a = 3, b = 4. Entonces:

$$c^2 = 3^2 + 4^2 - 2(3)(4)\cos(50^0)$$

$$c^2 = 9 + 16 - 24\cos(50^0) = 25 - 15{,}426 = 9{,}574$$

Para hallar c extraemos raíz cuadrada, luego:

$$c^2 = 9{,}574 \Rightarrow\Rightarrow c = 3{,}09$$

Ahora podemos hallar el ángulo α.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha) \Rightarrow\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$$

Reemplazando:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha) \Rightarrow\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$$

$$\cos(\alpha) = 0{,}669 \Rightarrow\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}669) = 48{,}01^0$$

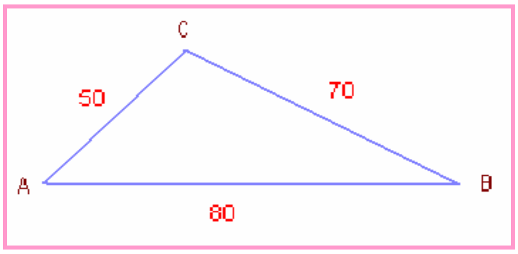
Para calcular el ángulo β, entonces:

$$\beta = 180^0 - (50^0 + 48{,}01^0) = 180^0 - 98{,}01 = 81{,}99^0$$

Ejemplo 2:

Dado un triángulo T, cuyos lados miden a = 80 cm. b = 50 cm. y c = 70 cm. Hallar los ángulos del triángulo T.

Solución:



La gráfica nos ilustra el caso que se expone en el enunciado del ejemplo 2. Como se conocen los tres lados, se puede utilizar el teorema de coseno, para hallar A y B, ya que C se obtiene por diferencia como en los casos anteriores.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(A) = \cos(A) = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$$

Reemplazamos:

$$\cos(A) = \frac{70^2 - 50^2 - 80^2}{-2(50)(80)} = \frac{-4000}{-8000} = 0{,}5$$

$$\cos(A) = 0{,}5 \Rightarrow\Rightarrow A = \cos^{-1}(0{,}5) = 60^0$$

Ahora calculamos el ángulo b:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B) = \cos(B) = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}$$

Reemplazando:

$$\cos(B) = \frac{50^2 - 70^2 - 80^2}{-2(70)(80)} = \frac{-8.800}{-11.200} = 0{,}7857$$

$$\cos(B) = 0{,}7857 \Rightarrow\Rightarrow B = \cos^{-1}(0{,}7857) = 38{,}21$$

Finalmente para calcular C:

$C = 180^0 - (60^0 + 38{,}21^0) = 81{,}79^0$

TRIÁNGULOS NO RECTÁNGULOS: PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Una vez analizados los principios sobre triángulos no rectángulos, ahora podemos resolver problemas donde se requiera la utilización de estos principios.

Resolver problemas de esta índole, no existe una metodología definida, paro es pertinente tener presente los siguientes aspectos.

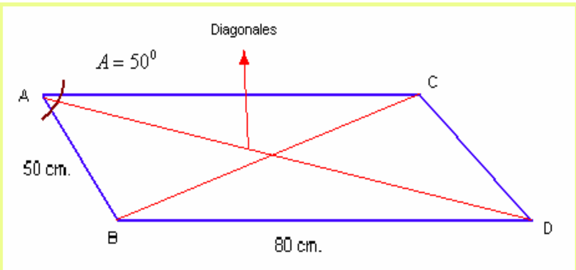
1. Leer el problema las veces que sean necesarios para entender lo que se tiene y lo que se desea obtener.
2. Hacer en lo posible un gráfico explicativo, que ilustre el fenómeno.
3. Aplicar el teorema pertinente, según las condiciones del problema planteado.
4. Realizar los cálculos necesarios, para buscar la respuesta.
5. Hacer las conclusiones del caso.

Ejemplo 1:

Hallar la longitud de las diagonales de un paralelogramo si sus lados miden 50 y 80 cm. Además uno de sus ángulos mide 50^0

Solución:

Una gráfica nos ayuda en la solución



Podemos calcular el lado BC, por medio del teorema de coseno.

$$(BC)^2 = 50^2 + 80^2 - 2(50)(80)\cos(A)$$

$\mathrm{Cos}(50^0) = 0{,}6427$

Desarrollando:

$$(BC)^2 = 2500 + 5400 - 8000(0{,}6427) = 7900 - 5141{,}6 = 2758{,}4$$

Para hallar la distancia se debe extraer raíz cuadrada:

$$(BC)^2 = 2758{,}4 \Rightarrow\Rightarrow BC = \sqrt{2758{,}4} = 52{,}52$$

En seguida podemos calcular el lado AD, pero necesitamos el ángulo B ó C. Podemos hallar el ángulo B, así:
Como A + B + C + D = 360^0, pero A = D y B = C, por ser un paralelogramo regular. Entonces: 50 + B + 50 + C = 360, luego: B + C = 360 – 100 = 260
Como B = C, entonces: B = 130^0

$$(AD)^2 = 50^2 + 80^2 - 2(50)(80)\cos(B)$$

$$(AD)^2 = 50^2 + 80^2 - 2(50)(80)\cos(130^0) = 2500 + 5400 - 8000(-0{,}64278)$$

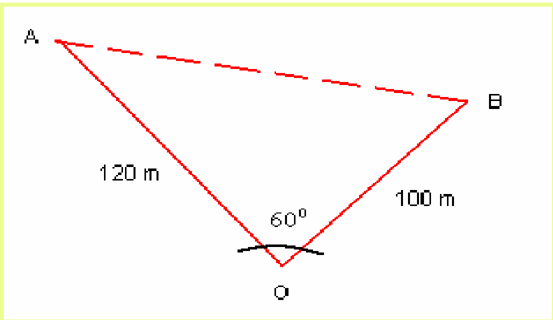
$$(AD)^2 = 7900 + 514224 = 1304224$$
$$(AD)^2 = 1304224 \Rightarrow\Rightarrow AD = 114{,}20$$

De esta manera se tiene las longitudes de las diagonales.

Ejemplo 2:

Un Topógrafo quiere determinar la distancia entre dos casas denominadas con A y B, desde el punto de observación del Topógrafo, el ángulo entre las dos casas y éste es de 60^0. La distancia del punto de observación y la casa A es de 120 m. y la distancia de este a la casa B es de 100 m. ¿Qué distancia separa las dos casas?

Solución:



Se debe hallar la distancia AB

Por le teorema de coseno:

$$(AB)^2 = 120^2 + 100^2 - 2(120)(100)\cos(60^0)$$

$\text{Cos}(60^0) = 0{,}5$

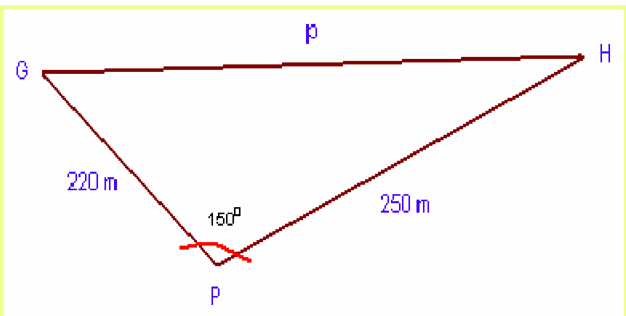
$$(AB)^2 = 14400 + 10000 - 24000(0{,}5) = 24400 - 12000 = 12400$$
$$(AB)^2 = 12400 \Rightarrow\Rightarrow AB = 111{,}355$$

Las casas distan entre ellas 111,355 metros.

Ejemplo 3:

Un Golfista golpea la pelota desplazándola 220 metros en línea recta, la pelota queda a 250 metros del hoyo. El ángulo que se forma en el punto donde quedo la pelota, con la ubicación del Golfista y el hoyo es de 150^0 ¿Cuál será la distancia del Golfista al hoyo?

Solución:



G = Ubicación del Golfista
H = Ubicación del hoyo
P = Ubicación de la pelota
p = Distancia del golfista al hoyo

Por el teorema del coseno se puede resolver el problema.

$$p^2 = (220)^2 + (250)^2 - 2(220)(250)\cos(150^0)$$

Desarrollando:

$$p^2 = 48400 + 62500 - 110000(-0,8660) = 110900 + 95260 = 206160$$

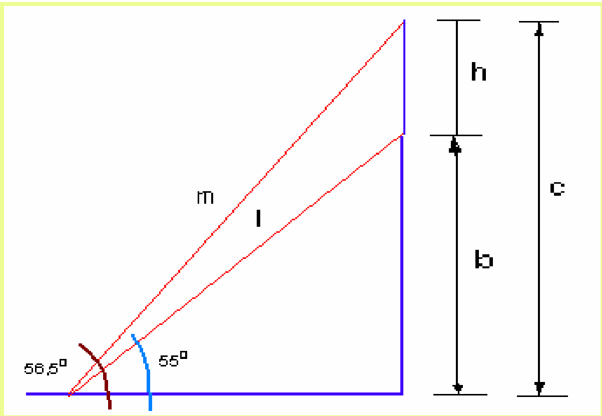
$$p^2 = 206.160 \Rightarrow\Rightarrow p = 454,048$$

El golfista esta a 454,048 metros del hoyo.

Ejemplo 4:

Un edifico tiene en la cima la bandera de la compañía, la altura del edificio es de 180 metros. El ángulo de elevación de la base del piso y la cima del edificio es de 55^0 y el ángulo de elevación de la base del piso y la punta de la bandera es de $56,5^0$. ¿Cual será la altura del asta de la bandera?

Solución:



h = Altura del asta de la bandera
l = Visual del piso a la cima del edificio
m = Visual del piso a la punto del asta de la bandera.
A = ángulo recto.
B = 55^0
C = $56,5^0$
b = Altura del edificio 180 metros
c = Altura del edificio mas el asta de la bandera

Por teorema de seno:

$$\frac{sen(C)}{c} = \frac{sen(B)}{b}$$

Reemplazando los datos correspondientes:

$$\frac{sen(56,5^0)}{c} = \frac{sen(55^0)}{180} \Rightarrow\Rightarrow c = \frac{sen(56,5^0)x180m}{sen(55^0)} = \frac{150,099}{0,8191} = 183,248$$

La altura del edificio y el asta es de 183,248 meros. Como se conoce la altura del edificio, por diferencia se haya la altura del asta.

h = c – b. Entonces: h = 183,248 – 180 = 3,248 metros.

El asta de la bandera mide 3,248 metros.

EJERCICIOS

1. Una circunferencia tiene un radio de 25 cm. subtendido por el ángulo central de 36^0 ¿Cual será la longitud del arco de la circunferencia?

Rta: 15, 71 cm.

2. Una persona se encuentra a 120 metros de la base de una torre inclinada, el ángulo de elevación desde su posición a la punta de la torre es de 24^0 a su vez la torre forma un ángulo con el suelo de 72^0 ¿Cuál será la altura de la torre?

Rta: h = 49,08 metros

3. Asumiendo que las orbitas de Mercurio y Tierra con circulares y se encuentran en el mismo plano. La tierra se encuentra a $9{,}3X10^7$ millas del sol y mercurio se encuentra a $3{,}6X10^7$ millas del sol. Si mercurio se ve desde la tierra y el ángulo entre mercurio, tierra y sol es de $8{,}35^0$ siendo la tierra el vértice. ¿Qué tan lejos esta la tierra de mercurio?

Rta: $1{,}25X10^8$ millas

4. Las casas de José y Alberto están al dados opuestos del río, un Ingeniero debe hacer un puente que comunique las dos casas, para lo cual ubica a 100 metros de la casa de José por la misma orilla, el Teodolito (aparato para visualizar puntos distantes) obteniendo los siguientes datos: El ángulo entre las casas y el teodolito es de 50^0, siendo el teodolito el vértice. El ángulo entre las casas y el teodolito es de 40^0, siendo la casa de José el vértice. ¿Cuál será la longitud del puente?

Rta. L = 76, 604 metros

5. Para medir la altura de una montaña, un Topógrafo determina que el ángulo de elevación desde su ubicación a la punta de la montaña es de 25^0, luego camina 100 metros y mide el nuevo ángulo el cual fue de 15^0 ¿Cuál será la longitud de la punta de la montaña hasta la ubicación inicial del Topógrafo?

Rta: L = 1.490,5 metros

6. Dos autos parten de una intersección de dos carreteras, cuya separación es de 80^0, uno viaja a 80 Km/hr y el otro a 100 Km/hr., al cabo de 45 minutos ¿Qué tan separados estarán los autos?

Rta: L = 87,53 Km

CAPÍTULO TRES: HIPERNOMETRÍA

INTRODUCCIÓN

La palabra HIPERNOMETRÍA, se acuño en este contexto haciendo referencia a el análisis de las funciones Hiperbólicas, de la misma manera como al análisis de las funciones trigonométricas se le denomina *Trigonometría*, es posible que la palabra no sea muy técnica, pero la idea es que con ella; en este material, se identifique el análisis de las funciones hiperbólicas.

En la parte de funciones trascendentales se analizaron las funciones hiperbólicas, sus principios y características. Así las funciones hiperbólicas tienen unas identidades básicas.

Objetivo General

Estudiar los principios y propiedades que identifican la Hipernometría, con el fin de adquirir los conocimientos necesarios para resolver problemas que requieran de funciones hiperbólicas.

Objetivos Específicos:

1. Analizar las identidades hiperbólicas
2. Conocer los principios de las identidades hiperbólicas

IDENTIDADES BÁSICAS:

Dentro de las identidades básicas se presentan las siguientes categóricas:

1. **Identidad Fundamental:** Análogamente a la identidad fundamental de las trigonométricas.

$$\boxed{\cosh^2(x) - senh^2(x) = 1}$$

Demostración:

Por la definición de las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico.

$$\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}-2e^xe^{-x}+e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}-e^{2x}+2e^xe^{-x}-e^{-2x}}{4}$$

$$\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{4e^xe^{-x}}{4} = e^xe^{-x} = 1$$

2. **Identidades de Cociente:** Estas se obtienen por las relaciones de seno hiperbólico y coseno hiperbólico.

a-) $\boxed{\tanh(\alpha) = \dfrac{senh(\alpha)}{\cosh(\alpha)}}$

Demostración:

Como $\tanh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Pero: $\tanh(x) = \dfrac{senh(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}/2}{e^x + e^{-x}/2} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \tanh(x)$

b-) $\boxed{\coth(\alpha) = \dfrac{\cosh(\alpha)}{senh(\alpha)}}$

Demostración:

Con los mismos argumentos utilizados para la tangente, solo que en este caso el cociente es coseno hiperbólico sobre seno hiperbólico.

Como $\coth(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Pero: $\coth(x) = \dfrac{\cosh(x)}{senh(x)} = \dfrac{e^x + e^{-x}/2}{e^x - e^{-x}/2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \coth(x)$

3. **Identidades Recíprocas:** Se les llama de esta manera debido a que a partir de la definición, al aplicar el recíproco, se obtiene nuevos cocientes.

a-) $\boxed{senh(\alpha) = \dfrac{1}{\csc h(\alpha)}}$ Recíprocamente $\boxed{\csc h(\alpha) = \dfrac{1}{senh(\alpha)}}$

Demostración:

Se deja como ejercicio para hacer en forma individual.

b-) $\boxed{\cosh(\alpha) = \dfrac{1}{\sec h(\alpha)}}$ Recíprocamente $\boxed{\sec h(\alpha) = \dfrac{1}{\cosh(\alpha)}}$

Demostración:

Como ejercicio para realizar con el grupo colaborativo.

c-) $\boxed{\tanh(\alpha) = \dfrac{1}{\coth(\alpha)}}$ Recíprocamente $\boxed{\coth(\alpha) = \dfrac{1}{\tanh(\alpha)}}$

Demostración:

Como ejercicio para trabajar con el grupo colaborativo y compartir con el Tutor.

4. **Identidades Cuadráticas:** a partir de la identidad fundamental y las identidades de cociente, se obtienen otras identidades llamadas cuadráticas.

a-) $\boxed{\tanh^2(\alpha) = 1 - \sec h^2(\alpha)}$

Demostración:

A partir de la identidad fundamental $\cosh^2(\alpha) - senh^2(\alpha) = 1$, dividimos toda la expresión por $\cosh^2(\alpha)$, entonces:

$$\frac{\cosh^2(\alpha)}{\cosh^2(\alpha)} - \frac{senh^2(\alpha)}{\cosh^2(\alpha)} = \frac{1}{\cosh^2(\alpha)} \Rightarrow\Rightarrow 1 - \tanh^2(\alpha) = \sec h^2(\alpha)$$

Despejando se obtiene la identidad propuesta.

$1 - \tanh^2(\alpha) = \sec h^2(\alpha) \Rightarrow\Rightarrow 1 - \sec h^2(x) = \tanh^2(x)$

b-) $\boxed{\coth^2(\alpha) = 1 + \csc^2(\alpha)}$

Demostración:

De la fundamental, dividimos por $sen^2(\alpha)$, entonces:

$$\frac{\cosh^2(\alpha)}{senh^2(\alpha)} - \frac{senh^2(\alpha)}{senh^2(\alpha)} = \frac{1}{senh^2(\alpha)} \Rightarrow\Rightarrow \coth^2(x) - 1 = \csc h^2(x)$$

Despejando tenemos:

$\coth^2(x) - 1 = \csc h^2(x) \Rightarrow\Rightarrow \coth^2(x) = 1 + \csc h^2(x)$

IDENTIDADES DE SUMA Y DIFERENCIA:

a-) $\boxed{senh(\alpha \pm \beta) = senh(\alpha)\cosh(\beta) \pm \cosh(\alpha)senh(\beta)}$

b-) $\boxed{\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh(\alpha)\cosh(\beta) \pm senh(\alpha)senh(\beta)}$

IDENTIDADES DE ÁNGULO DOBLE:

a-) $$\boxed{senh(2\beta) = 2senh(\beta)\cosh(\beta)}$$

Demostración:

Sabemos que $senh(\alpha+\beta) = senh(\alpha)\cosh(\beta) + \cosh(\alpha)senh(\beta)$, pero como α = β entonces:

$$senh(\alpha+\alpha) = senh(\alpha)\cosh(\alpha) + \cosh(\alpha)senh(\alpha) = senh(\alpha)\cosh(\alpha) + senh(\alpha)\cosh(\alpha)$$

Operando: $senh(\alpha+\alpha) = 2senh(\alpha)\cosh(\alpha)$
Así queda demostrada esta identidad.

b-) $$\boxed{\cosh(2\alpha) = \cosh^2(\alpha) + senh^2(\alpha)}$$

Demostración:

Siguiendo la misma metodología del caso anterior.

$$\cosh(2\alpha) = \cosh(\alpha+\alpha) = \cosh(\alpha)\cosh(\alpha) + senh(\alpha)senh(\alpha) = \cosh^2(\alpha) + senh^2(\alpha)$$

Así $\cosh(2\alpha) = \cosh^2(\alpha) + senh^2(\alpha)$

IDENTIDADES AL CUADRADO:

a-) $$\boxed{senh^2(x) = \frac{\cosh(2x) - 1}{2}}$$

b-) $$\boxed{\cosh^2(x) = \frac{\cosh(2x) + 1}{2}}$$

BIBLIOGRAFÍA

BARNET, Raymond. Álgebra y trigonometría. Mc Graw Hill, México, 1.978

______ Precalculo, FUNCIONES Y Gráficas, Mc Graw Hill, México, 1.999

LEITHOLD, Louis. Álgebra y Trigonometría, con Geometría Analítica. Oxford, México, 1992

LOVAGLIA, Florence, Álgebra, Reverte, 1.972

STANLEY Smith. Álgebra y Trigonometría. Editorial Iberoamericana, USA 1997

KEDDY, BITTINGER, Álgebra y Trigonometría, Fondo Educativo Interamericano, .978

SWOKOSKI, Earl, Álgebra y Trigonometría, con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamericano, 1.981

ALLENDOELFER, Oakley, Fundamentos de Matemáticas Universitarias. Mc Graw Hill, México, 1.982

MUNEM y YIZZE, Precalculus, Reverte, 1.980

HENGEN, Henry. Fundamental Mathematical Structures, Scott Foresman and Company. 1.966

TAYLOR, Wade. Matemáticas Básicas. Limusa, 1.981

SULLIVAN, Michael, Precálculo, Pearson Education. México, 1997

GUSTAFSON, David. Álgebra Intermedia, Thomson Learning. México, 1997

STEWART; Janes, REDLIN Lothar, WATSON, Saleem. Precálculo, International Thomson Editores, 3º Edición, México, 2001

SWOKOSWKI, Earl y COLE, Jeffery. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Thomson Learning, 10º Edición, Bogotá Colombia, 2002

JOHNSON, Murphu y STEFFENSEN, Arnold, Álgebra y Trigonometría con Aplicaciones. Trillas, México D. F. 1.994

ZILL, Dennis y DEWAR, Jacqueline. Álgebra y Trigonometría, 2º Edición, Mc Graw Hill, Bogotá Colombia, 2. 000