pero $$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \quad \Rightarrow \quad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$$

Si define ε como 0 cuando $\Delta x = 0$, después ε se convierte en función continua de Δx. De esta manera para una función f derivable, puede escribir

$$\boxed{7} \quad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x \quad \text{donde} \quad \varepsilon \to 0 \text{ a medida que } \Delta x \to 0$$

y ε es una función continua de Δx. Esta propiedad de las funciones derivables es lo que permite probar la regla de la cadena.

PRUEBA DE LA REGLA DE LA CADENA Suponga que $u = g(x)$ es derivable en a y $y = f(u)$ lo es en $b = g(a)$. Si Δx es un incremento en x y Δu y Δy son los incrementos correspondientes en u y y, en seguida puede aplicar la ecuación 7 para escribir

$$\boxed{8} \quad \Delta u = g'(a)\,\Delta x + \varepsilon_1\,\Delta x = [g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

donde $\varepsilon_1 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. De manera análoga

$$\boxed{9} \quad \Delta y = f'(b)\,\Delta u + \varepsilon_2\,\Delta u = [f'(b) + \varepsilon_2]\,\Delta u$$

donde $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta u \to 0$. Si ahora sustituye la expresión para Δu de la ecuación 8 en la ecuación 9, obtiene

$$\Delta y = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

de modo que $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$

Cuando $\Delta x \to 0$, la ecuación 8 demuestra que $\Delta u \to 0$. De modo que tanto el $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ a medida que $\Delta x \to 0$. Debido a eso

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$
$$= f'(b)g'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

Esto prueba la regla de la cadena. □

3.4 EJERCICIOS

1–6 Escriba la función compuesta en la forma $f(g(x))$. [Identifique la función interior $u = g(x)$ y la exterior $y = f(u)$]. Luego, encuentre la derivada dy/dx.

1. $y = \operatorname{sen} 4x$
2. $y = \sqrt{4 + 3x}$
3. $y = (1 - x^2)^{10}$
4. $y = \tan(\operatorname{sen} x)$
5. $y = e^{\sqrt{x}}$
6. $y = \operatorname{sen}(e^x)$

7–46 Halle la derivada de la función.

7. $F(x) = (x^4 + 3x^2 - 2)^5$
8. $F(x) = (4x - x^2)^{100}$
9. $F(x) = \sqrt[3]{1 + 2x + x^3}$
10. $f(x) = (1 + x^4)^{2/3}$
11. $g(t) = \dfrac{1}{(t^4 + 1)^3}$
12. $f(t) = \sqrt[3]{1 + \tan t}$
13. $y = \cos(a^3 + x^3)$
14. $y = a^3 + \cos^3 x$
15. $y = xe^{-kx}$
16. $y = 3\cot(n\theta)$
17. $g(x) = (1 + 4x)^5(3 + x - x^2)^8$
18. $h(t) = (t^4 - 1)^3(t^3 + 1)^4$
19. $y = (2x - 5)^4(8x^2 - 5)^{-3}$
20. $y = (x^2 + 1)\sqrt[3]{x^2 + 2}$

21. $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^3$
22. $y = e^{-5x}\cos 3x$
23. $y = e^{x\cos x}$
24. $y = 10^{1 - x^2}$
25. $F(z) = \sqrt{\dfrac{z - 1}{z + 1}}$
26. $G(y) = \dfrac{(y - 1)^4}{(y^2 + 2y)^5}$
27. $y = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + 1}}$
28. $y = \dfrac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$
29. $y = \operatorname{sen}(\tan 2x)$
30. $G(y) = \left(\dfrac{y^2}{y + 1}\right)^5$
31. $y = 2^{\operatorname{sen} \pi x}$
32. $y = \tan^2(3\theta)$
33. $y = \sec^2 x + \tan^2 x$
34. $y = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$
35. $y = \cos\left(\dfrac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}\right)$
36. $f(t) = \sqrt{\dfrac{t}{t^2 + 4}}$
37. $y = \cot^2(\operatorname{sen} \theta)$
38. $y = e^{k \tan \sqrt{x}}$
39. $f(t) = \tan(e^t) + e^{\tan t}$
40. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$
41. $f(t) = \operatorname{sen}^2(e^{\operatorname{sen}^2 t})$
42. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$
43. $g(x) = (2ra^{rx} + n)^p$
44. $y = 2^{3^{x^2}}$
45. $y = \cos\sqrt{\operatorname{sen}(\tan \pi x)}$
46. $y = [x + (x + \operatorname{sen}^2 x)^3]^4$

47–50 Hallar la primera y segunda derivadas de la función.

47. $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
48. $y = xe^{cx}$
49. $y = e^{\alpha x}\operatorname{sen} \beta x$
50. $y = e^{e^x}$

51–54 Encuentre una ecuación de la recta tangente de la curva en un punto dado.

51. $y = (1 + 2x)^{10}$, $(0, 1)$
52. $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$, $(0, 0)$
53. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$, $(\pi, 0)$
54. $y = x^2e^{-x}$, $(1, 1/e)$

55. (a) Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2/(1 + e^{-x})$ en el punto $(0, 1)$.
 (b) Ilustre el inciso (a) dibujando la curva y la recta tangente sobre la misma pantalla.

56. (a) La curva $y = |x|/\sqrt{2 - x^2}$ se llama curva *nariz de bala*. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(1, 1)$.
 (b) Ilustre el inciso (a) dibujando la curva y la recta tangente sobre la misma pantalla.

57. (a) Si $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$, encuentre $f'(x)$.
 (b) Compruebe que su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y f'.

58. La función $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} 2x)$, $0 \leq x \leq \pi$, surge en aplicaciones de la síntesis de modulación de frecuencia (FM).
 (a) Use una gráfica de f producida por un aparato graficador para trazar un boceto aproximado de la gráfica de f'.
 (b) Calcule $f'(x)$ y utilice esta expresión, junto con un dispositivo graficador, para graficar f'. Compare con su boceto del inciso (a).

59. Encuentre todos los puntos en la gráfica de la función
$$f(x) = 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$$
en los cuales la recta tangente es horizontal.

60. Determine las coordenadas x de todos los puntos de la curva $y = \operatorname{sen} 2x - 2\operatorname{sen} x$ en los cuales la tangente es horizontal.

61. Si $F(x) = f(g(x))$ donde $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$, $f'(5) = 3$, $g(5) = -2$, y $g'(5) = 6$ Hallar $F'(5)$.

62. Si $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$, donde $f(1) = 7$ y $f'(1) = 4$, hallar $h'(1)$.

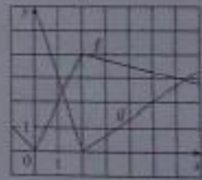
63. Se da una tabla de valores de f, g, f' y g'.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

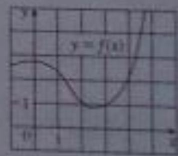
 (a) Si $h(x) = f(g(x))$, encuentre $h'(1)$.
 (b) Si $H(x) = g(f(x))$, halle $H'(1)$.

64. Sean f y g las funciones del ejercicio 63.
 (a) Si $F(x) = f(f(x))$, encuentre $F'(2)$.
 (b) Si $G(x) = g(g(x))$, encuentre $G'(3)$.

65. Si f y g son las funciones cuyas gráficas se ilustran, sea $u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$, y $w(x) = g(g(x))$. Encuentre, si existe, cada derivada. En caso contrario, explique por qué.
 (a) $u'(1)$ (b) $v'(1)$ (c) $w'(1)$



66. Si f es la derivada cuya gráfica se muestra, sea $h(x) = f(f(x))$ y $g(x) = f(x^2)$. Utilice la gráfica de f para estimar el valor de cada derivada.
 (a) $h'(2)$ (b) $g'(2)$



67. Suponga que f es derivable en $\mathbb{R}$. Sea $F(x) = f(e^x)$ y $G(x) = e^{f(x)}$. Encuentre expresiones para (a) $F'(x)$ y (b) $G'(x)$.

68. Suponga que f es derivable en $\mathbb{R}$ y α es un número real. Sea $F(x) = f(x^\alpha)$ y $G(x) = [f(x)]^\alpha$. Encuentre expresiones para (a) $F'(x)$ y (b) $G'(x)$.

69. Sea $r(x) = f(g(h(x)))$, donde $h(1) = 2$, $g(2) = 3$, $h'(1) = 4$, $g'(2) = 5$ y $f'(3) = 6$. Encuentre $r'(1)$.

70. Si g es una función derivable dos veces y $f(x) = xg(x^2)$, hallar f'' en términos de g, g', y g''.

71. Si $F(x) = f(3f(4f(x)))$, donde $f(0) = 0$ y $f'(0) = 2$, hallar $F'(0)$.

72. Si $F(x) = f(xf(xf(x)))$, donde $f(1) = 2, f(2) = 3, f'(1) = 4, f'(2) = 5$, y $f'(3) = 6$, hallar $F'(1)$.

73. Demuestre que la función $y = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$ satisface la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = 0$.

74. ¿Para que valores de r la función $y = e^{rx}$ satisface la ecuación $y'' + 5y' - 6y = 0$?

75. Hallar la quincuagésima derivada de $y = \cos 2x$.

76. Encuentre la derivada 1000 de $f(x) = xe^{-x}$.

77. La ecuación expresa el desplazamiento de una partícula de una cuerda vibrante.

$$s(t) = 10 + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(10\pi t)$$

En ella s se mide en centímetros y t en segundos. Encuentre la velocidad y la aceleración de la partícula después de t segundos.

78. Si la ecuación del movimiento de una partícula está dada por $s = A\cos(\omega t + \delta)$, se dice que la partícula describe un *movimiento armónico simple*.
(a) Encuentre la velocidad de la partícula en el instante t.
(b) ¿Cuándo es 0 la velocidad?

79. Una estrella variable Cefeida tiene brillantez que aumenta y disminuye de manera alternada. La estrella de ese tipo más visible es la Delta Cefeida, para la cual el intervalo entre los momentos de máxima brillantez es de 5.4 días. La brillantez promedio de esta estrella es de 4.0 y su brillantez cambia en ± 0.35. En vista de estos datos, la brillantez de la Delta Cefeida en el tiempo t, donde éste se mide en días, se ha modelado mediante la función

$$B(t) = 4.0 + 0.35\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{5.4}\right)$$

(a) Halle la relación de cambio de la brillantez después de t días.
(b) Encuentre, correcta hasta dos cifras decimales, la relación de aumento después de un día.

80. En el ejemplo 4 de la sección 1.3, obtuvo un modelo para la duración de la luz diurna (en horas) en Filadelfia en el t-ésimo día del año

$$L(t) = 12 + 2.8\operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

Aplique este modelo para comparar cómo aumentan las horas de luz diurna en Filadelfia el 21 de marzo y el 21 de mayo.

81. El movimiento de un resorte que se somete a una fuerza de fricción o una fuerza de amortiguamiento (como un amortiguador en un automóvil) se modela a menudo mediante el producto de una función exponencial y una función seno o coseno. Suponga que la ecuación del movimiento de un punto sobre tal resorte es

$$s(t) = 2e^{-1.5t}\operatorname{sen} 2\pi t$$

donde s se mide en centímetros y t en segundos. Halle la velocidad después que transcurren t segundos y dibuje las funciones de posición y de velocidad para $0 \leqslant t \leqslant 2$.

82. En ciertas circunstancias, un rumor se esparce según la ecuación

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

donde $p(t)$ es la proporción de la población que lo conoce en el tiempo t, y a y k son constantes positivas. [En la sección 9.4 verá que ésta es una ecuación razonable para $p(t)$.]
(a) Encuentre $\lim_{t\to\infty} p(t)$.
(b) Halle la rapidez de esparcimiento del rumor.
(c) Dibuje p para el caso en que $a = 10$, $k = 0.5$, con t medido en horas. Use la gráfica para estimar cuánto tiempo transcurrirá para que el 80% de la población escuche el rumor.

83. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con desplazamiento $s(t)$, velocidad $v(t)$, y aceleración $a(t)$. Demuestre que

$$a(t) = v(t)\frac{dv}{ds}$$

Explique la diferencia entre los significados de las derivadas dv/dt y dv/ds.

84. Se bombea aire dentro de un globo esférico para el clima. En cualquier tiempo t, el volumen del globo es $V(t)$ y su radio es $r(t)$.
(a) ¿qué representa las derivadas dV/dr y dV/dt.
(b) Expres dV/dt en términos de dr/dt.

85. El *flash* (unidad de destello) de una cámara funciona mediante el almacenamiento de carga en un capacitor y su liberación repentina cuando se lanza el destello. Los datos siguientes describen la carga que queda en el capacitor (en microcoulombs, μC) en el instante t (en segundos).

t	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
Q	100.00	81.87	67.03	54.88	44.93	36.76

(a) Halle, usando una calculadora graficadora o una computadora, un modelo exponencial para la carga.
(b) La derivada $Q'(t)$ representa la corriente eléctrica (en microamperes, μA) que fluye del capacitor hacia el bulbo de la lámpara de destello. Con el resultado del inciso (a), estime la corriente cuando $t = 0.04$ s. Compare la respuesta con el resultado del ejemplo 2 de la sección 2.1.

86. En la tabla se da la población de estadounidenses, desde 1790 hasta 1860.

Año	Población	Año	Población
1790	3 929 000	1830	12 861 000
1800	5 308 000	1840	17 063 000
1810	7 240 000	1850	23 192 000
1820	9 639 000	1860	31 443 000

(a) Use una calculadora graficadora o una computadora para hacer coincidir una función exponencial con los datos. Dibuje los puntos correspondientes a los datos y el modelo exponencial. ¿Qué tan bien coinciden?
(b) Estime las proporción de incremento de la población en 1800 y 1850 promediando las pendientes de las rectas secantes.
(c) Use el modelo exponencial del inciso (a) para estimar las proporciones de crecimiento en 1800 y 1850. Compare estas estimaciones con las del inciso (b).
(d) Utilice el modelo exponencial para predecir la población en 1870. Compare con la población real de 38 558 000. ¿Puede explicar la discrepancia?

87. Los sistemas algebraicos para computadora (CAS) tienen comandos que derivan funciones, pero la forma de la respuesta quizá no convenga, como consecuencia, pueden ser necesarios otros comandos para simplificarla.
(a) Use un CAS para hallar la derivada del ejemplo 5 y compárela con la respuesta en ese ejemplo. Enseguida, use el comando de simplificación y vuelva a comparar.
(b) Utilice un CAS para derivar la función del ejemplo 6. ¿Qué sucede si usa el comando de simplificación? ¿Qué ocurre si emplea el comando de factorización? ¿Cuál forma de la respuesta sería la mejor para localizar las tangentes horizontales?

88. (a) Use un CAS para derivar la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^4 - x + 1}{x^4 + x + 1}}$$

y simplificar el resultado.
(b) ¿En dónde tiene la gráfica de f tangentes horizontales?
(c) Trace las gráficas de f y f' en la misma pantalla. ¿Son coherentes las gráficas con su respuesta al inciso (b)?

89. Mediante la regla de la cadena demuestre lo siguiente.
(a) La derivada de una función par es una función impar.
(b) La derivada de una función impar es una función par.

90. Aplique la regla de la cadena y la regla del producto para obtener otra demostración de la regla del cociente. [*Sugerencia:* escriba $f(x)/g(x) = f(x)[g(x)]^{-1}$.]

91. (a) Si n es un entero positivo, demuestre que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^n x \cos nx) = n \operatorname{sen}^{n-1} x \cos(n+1)x$$

(b) Plantee una fórmula para la derivada de $y = \cos^n x \cos nx$ que es similar a la del inciso (a).

92. Suponga que $y = f(x)$ es una curva que siempre queda arriba del eje x y nunca tiene una tangente horizontal, donde f es derivable en todos los puntos. ¿Para qué valor de y la relación de cambio de y^5 con respecto a x es 80 veces la tasa de cambio de y con respecto a x?

93. Use la regla de la cadena para demostrar que si θ se mide en grados, después

$$\frac{d}{d\theta}(\operatorname{sen}\theta) = \frac{\pi}{180}\cos\theta$$

(Esto da una razón para la convención de que siempre se use el radián cuando se manejen funciones trigonométricas en el cálculo: las fórmulas de derivación no serían tan sencillas si usara el grado.)

94. (a) Escriba $|x| = \sqrt{x^2}$ y aplique la regla de la cadena para demostrar que

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|}$$

(b) Si $f(x) = |\operatorname{sen} x|$, encuentre $f'(x)$ y trace las gráficas de f y f'. ¿En dónde f no es derivable?
(c) Si $g(x) = \operatorname{sen}|x|$, halle $g'(x)$ y dibuje g y g'. ¿En dónde g no es derivable?

95. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, f y g son funciones derivables dos veces, demuestre que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}$$

96. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, donde f y g tienen tercera derivada, hallar una fórmula por d^3y/dx^3 parecida a la que se proporciona en el ejercicio 95.

PROYECTO DE APLICACIÓN

¿DÓNDE DEBE UN PILOTO INICIAR UN DESCENSO?

En la figura se muestra una trayectoria de aproximación para el aterrizaje de un avión que satisface las condiciones siguientes:

(i) La altura de crucero es h, cuando se inicia el descenso a una distancia ℓ del punto de contacto con la pista en el origen.

(ii) El piloto debe mantener una rapidez horizontal constante v a todo lo largo del descenso.

Hallar dy/dx para las funciones siguientes:

1) $y = e^{1/x}$

2) $y = e^{-1/x} + e^{1/x}$

3) $y = e^{-1/x} + e^{1/x}$

4) $y = \dfrac{e^{x}}{1+x^{2}}$

5) $y = \log \dfrac{1}{1+x^{2}}$

6) $y = (x^{2}+1)\log \dfrac{1}{\sqrt{x^{2}+1}}$

7) $y = \log \dfrac{x^{3}+1}{\sqrt{x-1}} ; x > 1$

8) $y = \log_{3}(3^{x}+7)$

9) $y = 7^{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x}$

10) $y = \log_{3}(3^{x+1})$

11) $y = (x^{2}+1)^{x^{2}+1}$

12) $y = (e^{-x}+e^{x})^{x}$

Hallar dy/dx para las funciones siguientes:

1) $y = \operatorname{sen}(3x)\cos(2x)$

2) $y = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$

3) $y = x^3 \cos(x^2)$

4) $y = \sec(x)\tan(1/x)$

5) $y = \sec^2(x) + \tan^3(x)$

6) $y = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x + \tan(x)}\right)$